

1. Критерий Коши существования предела.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X и точка a является предельной точкой множества X .

Определение 18.6. Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x', x''$, удовлетворяющих условиям $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Понятия фундаментальности для последовательностей и условия Коши для функции являются аналогичными.

Теорема 18.3. (критерий Коши) Для того чтобы функция имела предел в точке a , необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла в этой точке условию Коши.

Доказательство.

I. Необходимость.

Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Иначе говоря, $\forall \varepsilon > 0$ найдётся проколота δ -окрестность точки a , что для любого значения аргумента x' в этой окрестности значение

функции $f(x')$ отличается от b меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, то есть $|f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ (рассматривается определение по Коши). Аналогично для любого аргумента x'' выполняется $|f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, что удовлетворяет условию Коши по определению, что и требовалось доказать.

2. 1-ая теорема Больцано - Коши (о нуле функции).

(о прохождении непрерывной функции через нуль при смене знаков): Пусть $f \in C[a, b]$, и пусть $f(a) \cdot f(b) < 0$ (т.е. её значения на концах есть числа разных знаков). Тогда $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$. Доказательство. Делим отрезок $[a, b] = I_0$ пополам. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то на концах одного из двух, полученных в результате деления отрезков, функция снова принимает значения разных знаков. Делим данный отрезок, I_1 пополам и т.д. Тогда мы либо на каком-то шаге попадём в точку $\xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$, либо получим стягивающуюся систему сегментов $\{I_n\}$ на концах которых функция f принимает значения разных знаков. В последнем случае, на основании принципа вложенных сегментов, $\exists \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

По построению $\exists \{a_n\}, \{b_n\}$ – две последовательности концов отрезков I_n такие, что $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. По свойствам предела и определению непрерывности, получаем: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\xi) \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$.

3. 2-ая теорема Больцано - Коши (о промежуточном значении).
 теорема Больцано-Коши. Следствие (о промежуточном значении непрерывной функции): Пусть $f \in C[a, b]$, причём $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, а γ – произвольное число, заключённое между α и β . Тогда $\exists c \in [a, b] : f(c) = \gamma$.
 Доказательство. Если $\alpha = \beta = \gamma$, то в качестве c берём a или b . По этой же причине очевиден случай, когда $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \beta$. Пусть $\alpha \neq \beta$. Не ограничивая общности считаем, что $\alpha < \gamma < \beta$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \gamma$. Как разностью двух непрерывных функций, функция g – непрерывна на $[a, b]$, и принимает на концах этого сегмента значения разных знаков: $g(a) = f(a) - \gamma = \alpha - \gamma < 0$; $g(b) = f(b) - \gamma = \beta - \gamma > 0$. По теореме 5 $\exists \xi \in (a, b) : g(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = \gamma$

4. 1-ая теорема Вейерштрасса (об ограниченности функции).

1-ая теорема Вейерштрасса (об ограниченности функции)

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем. При этом на отрезке есть точка, где функция принимает максимальное значение, и есть точка, где она принимает минимальное значение.

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция на отрезке $E = [a, b]$. В силу локальных свойств непрерывной функции для любой точки $x \in E$ найдется окрестность $U(x)$ такая, что на множестве $U_c(x) = E \cap U(x)$ функция ограничена.

Совокупность таких окрестностей $U(x)$, построенных для всех точек $x \in E$, образует покрытие отрезка $[a, b]$ интервалами, из которого по лемме о конечном покрытии можно извлечь конечную систему $U(x_1), \dots, U(x_n)$ интервалов, покрывающих в совокупности отрезок $[a, b]$. Поскольку на множестве $E \cap U(x_i) = U_c(x_i)$ функция ограничена, т. е. $m_i \leq f(x) \leq M_i$, где $m_i, M_i \in \mathbb{R}$ и $x \in U_c(x_i)$, то в любой точке $x \in E = [a, b]$ имеем

$$\min \{m_1, \dots, m_n\} \leq f(x) \leq \max \{M_1, \dots, M_n\}.$$

Ограниченность функции на отрезке $[a, b]$ установлена. Пусть теперь $M = f(x)$. Предположим, что в любой точке $x \in E$ ($f(x) < M$). Тогда непрерывная на E функция $M - f(x)$ нигде на E не обращается в нуль, хотя (в силу определения M) может принимать значения, сколь угодно близкие к нулю. Тогда функция $\frac{1}{M - f(x)}$, с одной стороны, в силу локальных свойств непрерывных функций, непрерывна на E , а с другой — не ограничена на E , что противоречит уже доказанной ограниченности функции, непрерывной на отрезке.

Итак, существует точка $x_0 \in [a, b]$, в которой $f(x_0) = M$.

Аналогичным образом, рассмотрев $m = f(x)$ и вспомогательную функцию $\frac{1}{f(x) - m}$, докажем, что существует точка $x_0 \in [a, b]$, в которой $f(x_0) = m$.

5. 2-ая теорема Вейерштрасса (о достижении экстремумов).

Вторая теорема Вейерштрасса о максимуме и минимуме непрерывной функции

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f достигает на нем своих нижней и верхней граней. Или, что тоже самое, достигает на отрезке своего минимума и максимума. То есть существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, так что для любого $x \in [a, b]$, выполняются неравенства:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Доказательство ¶

Различие между максимумом (минимумом) и верхней (нижней) гранью заключается в следующем: максимум (минимум) принадлежит множеству значений функции, а верхняя (нижняя) грань может не принадлежать этому множеству. Пусть, например, на открытом интервале $X = \{x : 0 < x < 1\}$ задана функция $f(x) = x$. На этом интервале функция имеет верхнюю и нижнюю грани:

$$\sup_{x \in X} f(x) = 1, \quad \inf_{x \in X} f(x) = 0.$$

Но максимума и минимума не имеет. Действительно, для любого $x_0 \in X$ всегда можно указать такие числа $x_1 = (x_0 + 1)/2$ и $x_2 = x_0/2$, принадлежащие X , значения функции от которых будут больше и меньше x_0 :

$$f(x_1) > f(x_0), \quad f(x_2) < f(x_0).$$

На отрезке $X = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ функция имеет как верхнюю и нижнюю грани, так максимум и минимум:

$$\sup_{x \in X} f(x) = \max_{x \in X} f(x) = f(1) = 1, \quad \inf_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} f(x) = f(0) = 0.$$

Также верхняя (нижняя) грань может равняться плюс (минус) бесконечности: $+\infty$ ($-\infty$), а максимум (минимум) не может быть бесконечным числом.

6. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора.

Теорема 5 ([Кантор](#)). *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.*

▷ Докажем теорему от противного. Допустим, что существует непрерывная на некотором отрезке $[a, b]$ функция f , которая, однако, на нем не равномерно непрерывна. Это означает (см. (7.22)), что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся такие точки $x \in [a, b]$ и $x' \in [a, b]$, что $|x' - x| < \delta$, но $|f(x') - f(x)| \geq \varepsilon$. В частности, для $\delta = 1/n$ найдутся такие точки, обозначим их x_n и x'_n , что

$$|x'_n - x_n| < 1/n, \quad (7.24)$$

но

$$|f(x'_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0. \quad (7.25)$$

Из последовательности точек $\{x_n\}$ в силу свойства компактности отрезка (см. [теорему 4](#) в п. 5.8) можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Обозначим ее предел x_0 :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0. \quad (7.26)$$

Поскольку $a \leq x_{n_k} \leq b, k = 1, 2, \dots$, то $a \leq x_0 \leq b$. Функция f непрерывна в точке x_0 , поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0). \quad (7.27)$$

Подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$ последовательности $\{x'_n\}$ также сходится в точке x_0 , ибо

$$|x'_{n_k} - x_0| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < 1/n_k + |x_{n_k} - x_0| \rightarrow 0 \quad (7.24) \quad (7.26)$$

при $k \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0) \quad (7.28)$$

Из (7.27) и (7.28) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})] = f(x_0) - f(x_0) = 0,$$

а это противоречит условию, что при всех $k = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$|f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon > 0. \quad (7.25)$$

Полученное противоречие доказывает теорему. ◁

7. Формула Лейбница. (172 фихтен)

Предположим, что функции u, v от x имеют каждая производные до n -ого порядка, докажем, что выражение $y=uv$ также имеет n -ую производную

1 порядок- $y'=u'v+u+v'$

2 порядок $y''=u''v+2u'v'+uv''$

3 порядок $y'''=u'''v+3u''v'+uv'''$

Заметим, что правило напоминает разложение степени бинома

Запишем формулу

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}$$

Докажем Справедливость с помощью метода математической индукции

Допустим формула верна для n , тогда, если она верна для $n+1$, то формула действительна всегда

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^n C_n^i [u^{(n-i)} v^{(i)}]' = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i)} v^{(i+1)},$$

Теперь объединим слагаемые 2 сумм, произведение $u^{(n+1)} v^{(0)}$ входит только в 1 сумму, также, как и $u^{(0)} v^{(n+1)}$. Все остальные произведения имеют вид $u^{(n+1-k)} v^{(k)}$. Сумма соответствующих коэффициентов будет

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + u^{(0)} v^{(n+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)}, \end{aligned}$$

8. Точки локального экстремума. Теорема Ферма.

Теорема Ферма. Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке $\mathcal{X}$ и во внутренней точке c этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если в этой точке существует конечная производная $f'(c)$, то необходимо $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(x)$ принимает в точке c наибольшее значение, так что для всех x из $\mathcal{X}$

$$f(x) \leq f(c).$$

По определению производной:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

причем предел этот не зависит от того, будет ли x приближаться к c справа или слева. Но при $x > c$ выражение

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

так что и в пределе, при $x \rightarrow c + 0$, получится:

$$f'(c) \leq 0. \quad (1)$$

Если же $x < c$, то

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

и, переходя здесь к пределу при $x \rightarrow c - 0$, найдем:

$$f'(c) \geq 0. \quad (2)$$

Сопоставляя соотношения (1) и (2), приходим к требуемому заключению:

$$f'(c) = 0.$$

9. Теорема Ролля.

Теорема Ролля

☺ Пусть функция $y = f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[a; b]$;

2) дифференцируема на интервале $(a; b)$;

3) на концах отрезка $[a; b]$ принимает равные значения: $f(a) = f(b)$

☺ Тогда на интервале $(a; b)$ найдется по крайней мере одна точка x_0 , в которой $f'(x_0) = 0$

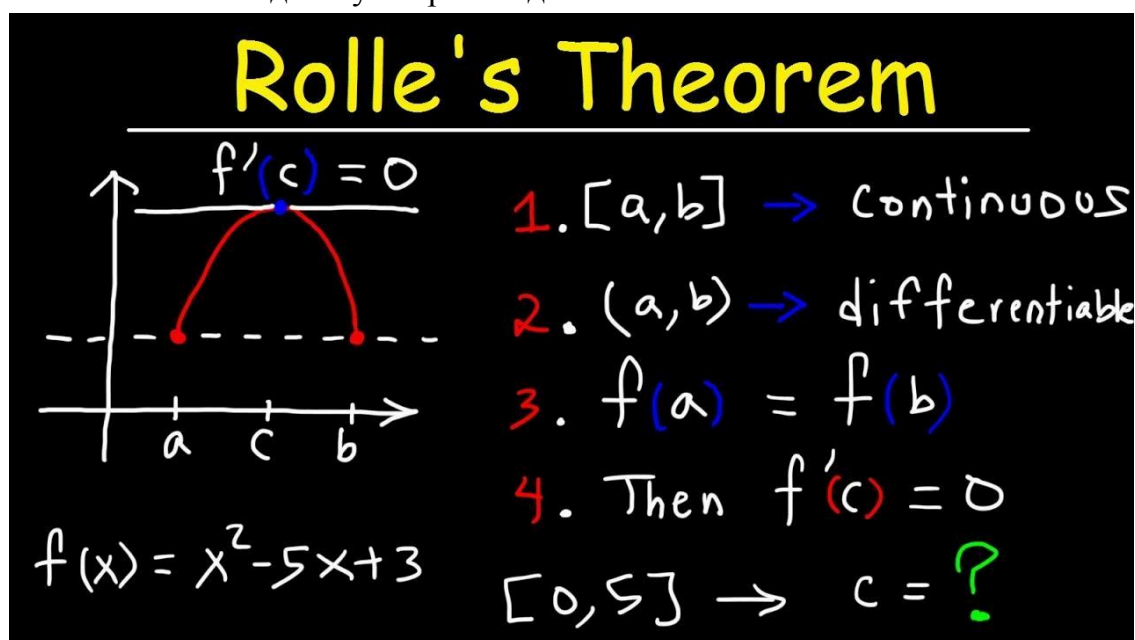
☺ Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. В силу второй теоремы Вейерштрасса она на этом отрезке принимает наименьшее и наибольшее значения. Пусть это будут значения m и M . Могут представиться два случая:

1) $M = m$. В этом случае $m \leq f(x) \leq m$, функция $y = f(x)$ является постоянной на отрезке $[a; b]$. Поэтому $f'(x) = 0$ во всем интервале $(a; b)$, теорема верна.

2) $M > m$. Тогда для функции $y = f(x)$ даже в том крайнем случае, когда, например, наибольшее значение функции принимается на конце отрезка $f(a) = f(b) = M$, наименьшее значение будет приниматься уже внутри отрезка. Следовательно, найдется точка $x_0 \in (a; b)$, в которой $f'(x_0) = 0$.

☺ Теорема Ролля имеет простой геометрический смысл: найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс.

☺ Если $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можно сформулировать так: между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется хотя бы один нуль производной



10. Теорема Лагранжа о конечных приращениях.

Теорема Лагранжа. Пусть: 1) $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, 2) существует конечная производная $f'(x)$, по крайней мере, в открытом промежутке (a, b) . Тогда между a и b найдется такая точка c ($a < c < b$), что для нее выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (3)$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию, определив ее в промежутке $[a, b]$ равенством:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, она непрерывна в $[a, b]$, так как представляет собой разность между непрерывной функцией $f(x)$ и линейной функцией. В промежутке (a, b) она имеет определенную конечную производную, равную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Наконец, непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $F(a) = F(b) = 0$, т. е. $F(x)$ принимает равные значения на концах промежутка.

Следовательно, к функции $F(x)$ можно применить теорему Ролля и утверждать существование в (a, b) такой точки c , что $F'(c) = 0$.

Таким образом,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \text{ откуда}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

что и требовалось доказать.

Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа; замечания относительно условий 1) и 2) теоремы, сделанные выше, сохра-

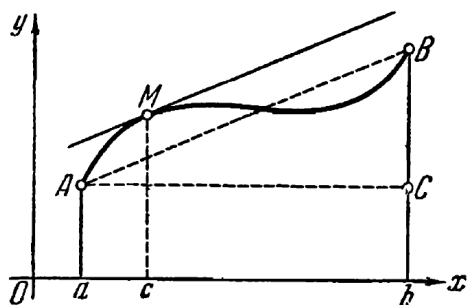


Рис. 40.

11. Теорема Коши.

Теорема Коши. (лекция 22)

Пусть $f(x) \rightarrow R$ и $g(x) \rightarrow R$ непрерывные ф-ии на отрезке $[a, b]$, дифференцируемые в интервале (a, b) , причем $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ тогда существует точка Q в интервале (a, b) для которой

$$\frac{F(b) - F(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{F'(Q)}{g'(Q)}$$

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию $W(x) = F(x) - \lambda g(x)$

Выберем λ так, чтобы $F(a) = F(b)$, т.е. $F(a) - \lambda g(a) = F(b) - \lambda g(b)$

$$\lambda = \frac{F(B)-F(a)}{g(B)-g(a)}$$

Для функции $W(x)$ выполним условие теоремы Ролля, поэтому существует точка Q , $W'(Q)=0$

$$F'(Q)-\lambda g'(Q) = 0$$

$$\lambda = \frac{F'(Q)}{g'(Q)}$$

Заметим, что $g(B) \neq g(a)$, действительно только если допустить, что $g(B)=g(a)$, то по теореме Ролля получим противоречие условию теоремы, значит она верна

12. Формула Тейлора для многочлена и для произвольной функции.

Формула Тейлора для многочлена

☉ Рассмотрим многочлен $P_n(x)$ целой степени n :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k.$$

☉ Покажем, что коэффициенты этого многочлена можно представить в виде

$$a_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (0 \leq k \leq n),$$

☉ где $P_n^{(k)}(x_0)$ – производные k -го порядка от $P_n(x)$ в точке x_0 . (Напомним, что $P_n^{(0)}(x_0) = P_n(x_0)$ – по определению.)

Очевидно, что $P_n(x_0) = a_0$. Найдем производную k -го порядка от многочлена $P_n(x)$ в точке $x = x_0$. Заметим, что

$$\frac{d^k}{dx^k}(x - x_0)^m = \begin{cases} k!, & \text{если } m = k, \\ 0, & \text{если } m < k, \\ \text{const} \cdot (x - x_0)^{m-k}, & \text{если } m > k. \end{cases}$$

☉ В точке $x = x_0$ единственной отличной от нуля производной k -го порядка является производная от $(x - x_0)^k$. При этом $P_n^{(k)}(x_0) = a_k k!$ и, таким образом,

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

- ☺ Эта формула называется **формулой Тейлора для многочленов**. При $x_0 = 0$ она принимает вид

$$P_n(x) = P_n(0) + \frac{P'_n(0)}{1!}x + \dots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

и называется **формулой Маклорена для многочленов**.

Формула Тейлора для произвольной функции

- ☺ **Теорема 1.** Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до n -го порядка включительно, то ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \end{aligned} \quad (1)$$

где функция $R_n(x)$ (остаточный член разложения) и ее производные до n -го порядка включительно обращаются в нуль в точке $x = x_0$:

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

- ☺ **Доказательство.** Обращение в нуль функции $R_n(x)$ при $x = x_0$ вытекает непосредственно из уравнения (1):

$$f(x_0) = f(x_0) + R_n(x_0) \quad \Rightarrow \quad R_n(x_0) = 0.$$

- ☺ Далее продифференцируем обе части равенства (1) по переменной x и затем положим $x = x_0$. Заметим, что

$$\left. \frac{d^k}{dx^k} (x-x_0)^m \right|_{x=x_0} = \begin{cases} k!, & \text{если } m = k, \\ 0, & \text{если } m < k, \\ \text{const} \cdot (x-x_0)^{m-k}|_{x=x_0} = 0, & \text{если } m > k. \end{cases}$$

- ☺ Следовательно,

$$f^{(k)}(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k! + R_n^{(k)}(x_0) \quad \Rightarrow \quad R_n^{(k)}(x_0) = 0$$

- ☺ для всех $0 \leq k \leq n$, что и требовалось доказать.

Формула (1) называется формулой Тейлора с остаточным членом $R_n(x)$, а ее частный случай при $x_0 = 0$ – формулой Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x).$$

- © Дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0 влечет за собой ее непрерывность в некоторой окрестности этой точки, а обращение в нуль в точке x_0 остаточного члена $R_n(x)$ и его производной (то есть быстроты изменения в окрестности точки x_0) означает, что $R_n(x)$ принимает малые значения – по крайней мере - в непосредственной близости от точки x_0 . Следовательно, формула Тейлора может использоваться для аппроксимации функций многочленами. При этом остаточный член $R_n(x)$ рассматривается как погрешность аппроксимации и отбрасывается:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

13. Формула Лопиталя

Правило Лопиталя. Решение примеров

правило Лопиталя - Бернулли $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Рассмотрим отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a , исключая, быть может, саму точку a .

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно являются бесконечно малыми при $x \rightarrow a$ $\left[\frac{0}{0}\right]$ или одновременно являются бесконечно большими при $x \rightarrow a$. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших функций при $x \rightarrow a$ равен пределу отношения их производных, при условии, что последний существует.

14. Интеграл Римана, Критерий Коши

В1. Интеграл Римана. Критерий Коши. Необходимое условие интегрируемости, достаточное условие.

Разбиением отрезка $[a, b]$ называется набор точек $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$.

Разбиение обозначают буквой P .

Разбиение может быть снабжено выделенными точками $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Для разбиения с выделенными точками используют обозначение (P, ξ) .

Максимальная длина отрезков $\lambda(P) = \max_{i=1, \dots, n} |x_{i+1} - x_i|$ называется **параметром разбиения**.

Говорят, что **функция** $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **интегрируема по Риману** на $[a, b]$ и ее интеграл равен I , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | \forall (P, \xi) \quad \lambda(P) < \delta \rightarrow \left| I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

(при любом ε больше 0 существует число больше 0, такое что при любом разбиении с выделенными точками и максимальной длине отрезков меньше этого числа будет выполняться условие: модуль интеграла функции минус сумма от $i=1$ до n произведения функции от выделенной точки на Δx_i меньше ε)

Интеграл обозначают через $\int_a^b f(x) dx$, а множество интегрируемых функций на $[a, b]$ через $R[a, b]$.

Сумму $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ называют **интегральной суммой Римана**.

Критерий Коши. Функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\tau', \xi'), (\tau'', \xi'') \in T'[a, b], d(\tau') < \delta, d(\tau'') < \delta : |\sigma(f, \tau', \xi') - \sigma(f, \tau'', \xi'')| < \varepsilon^{[12]}$$

Данный критерий есть ни что иное, как запись **критерия Коши сходимости по базе** для случая интеграла Римана.

Необходимое условие интегрируемости:

Если функция интегрируема по Риману, то она обязательно ограничена

Достаточные условия интегрируемости

Все перечисленные далее достаточные условия интегрируемости практически сразу следуют из критерия Лебега.

- Непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём
 - Ограниченная на отрезке функция, разрывная в конечном числе его точек, интегрируема на этом отрезке
 - Монотонная на отрезке функция, интегрируема на нём
 - Произведение интегрируемой функции на число интегрируемо
 - Сумма интегрируемых функций интегрируема
-
- Произведение интегрируемых функций интегрируема
 - Если отношение двух интегрируемых функций ограничено, то оно интегрируемо. Частный случай — если множество значений знаменателя не имеет 0 предельной точкой.
 - Модуль интегрируемой функции интегрируем.
 - Композиция функций $f(g(x))$, где f — непрерывна на отрезке $[\inf g(x), \sup f(x)]$, а g — интегрируема на $[a; b]$, интегрируема на $[a; b]$. Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она интегрируема на любом из его подотрезков.
 - Пусть $a < b < c$ и функция f интегрируема на $[a; b]$ и $[b; c]$. Тогда она интегрируема на $[a; c]$.

15. Критерий Дарбу, Лебега

16. Основная теорема интегрального исчисления

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — любая первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a, b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Нахождение определенных интегралов с использованием формулы Ньютона—Лейбница осуществляется в два шага: на первом шаге, используя технику нахождения неопределенного интеграла, находят некоторую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$; на втором применяется собственно формула Ньютона—Лейбница — находится приращение первообразной, равное искомому интегралу. В связи с этим введем обозначение для приращения первообразной, которое удобно использовать при записи решений. По определению положим

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

17. Формула Ньютона-Лейбница

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $F(x)$ является какой-либо её первообразной на этом отрезке, то $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ — некоторая первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Известно, что определенный интеграл с переменным верхним пределом, то есть функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ тоже является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$\Phi(x) = F(x) + C$, $C = \text{const}$, $a \leq x \leq b$

$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$ (1)

$x = a$ (1): $\int_a^a f(t) dt = F(a) + C$, $C = -F(a) \rightarrow$ (1): $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$ (2)

В (2) положим $x = b$: $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

$t \rightarrow x$: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ — формула Ньютона-Лейбница

$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$

$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

18. НИ, Критерий Коши

19. Признак абеля и дирихле

9. Ограниченные множества. Точные границы и их свойства.

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists c \in \mathbb{R}: x \leq c \forall x \in X$.

Число c называется верхней гранью/мажорантой X .

Множество X называется ограниченным снизу, если $\exists c \in \mathbb{R}: c \leq x \forall x \in X$. Число c называется нижней гранью/минорантой X .

Элемент $a \in X \subset \mathbb{R}$ называется наибольшим/максимальным, если $x \leq a \forall x \in X$.

Обозначается как $a = \max x$.

Элемент $a \in X \subset \mathbb{R}$ называется наименьшим/минимальным, если $x \geq a \forall x \in X$.

Обозначается как $a = \min x$.

Отметим, что если существует максимальный/минимальный элемент, то он единственный.

Наименьшее число из множества мажорант множества X называется точной верхней гранью X . Обозначается как $\sup x$.

Число $a \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$, если:

- 1) $x \leq a \forall x \in X$
- 2) $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} \exists x' \in X: a - \varepsilon < x' \leq a$

Наибольшее число из множества минорант множества X называется точной нижней гранью X . Обозначается как $\inf x$.

Число $a \in \mathbb{R}$ называется точной нижней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$, если:

- 1) $x \geq a \forall x \in X$
- 2) $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} \exists x' \in X: a \leq x' < a + \varepsilon$

10. Теорема существования точной верхней (нижней) границы для ограниченного сверху (снизу) множества.

Т е о р е м а: если множество $X = \{x\}$ ограничено сверху (снизу), то оно имеет и точную верхнюю (нижнюю) границу, при том единственную.

Доказательство: Проведем рассуждение по отношению к верхней границе. Обозначим через Y множество всех мажорант множества X . Поскольку по условию множество X ограничено, то множество всех его верхних граней не является пустым. Для $\forall x \in X \neq \emptyset$ и $\forall y \in Y \neq \emptyset$ имеем $x \leq y$, так как y – верхняя грань. По аксиоме полноты $\exists a \in \mathbb{R}: x \leq a \leq y (\forall x \in X, \forall y \in Y)$. Итак, a – мажоранта X , следовательно $a \in Y$. Поскольку $a \leq y (\forall y \in Y)$, то a является $\min Y = \sup X$. Из аксиом следует единственность a .

Аналогичным образом устанавливается, что справедлива теорема о точной нижней границе: пусть $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ – ограниченное снизу множество, тогда $\exists! \inf X$.

3. Принцип Коши-Кантора для системы вложенных отрезков.

Л е м м а (Коши—Кантора): Для любой последовательности $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_{n-1} \supset I_n \supset \dots$ вложенных отрезков найдется точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам.

Если, кроме того, известно, что для любого $\epsilon > 0$ в последовательности можно найти отрезок I_k , длина которого $|I_k| < \epsilon$, то c — единственная общая точка всех отрезков.

Заметим прежде всего, что для любых двух отрезков $I_m = [a_m, b_m]$, $I_n = [a_n, b_n]$ нашей последовательности имеет место $a_m \leq b_n$. Действительно, в противном случае мы получили бы $a_n < b_n < a_m \leq b_m$, т. е. отрезки I_m, I_n не имели бы общих точек, в то время как один из них (имеющий больший номер) должен содержаться в другом.

Таким образом, для числовых множеств $A = \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ выполнены условия аксиомы полноты, в силу которой найдется число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall a_m \in A, \forall b_n \in B$ выполнено $a_m \leq c \leq b_n$. В частности, $a_n \leq c \leq b_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Но это и означает, что точка c принадлежит всем отрезкам I_n .

Пусть теперь c_1 и c_2 — две точки, обладающие этим свойством. Если они различны и, например, $c_1 < c_2$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$, поэтому $0 < (c_2 - c_1) < (b_n - a_n)$ и длина каждого отрезка нашей последовательности не может быть меньше положительной величины $(c_2 - c_1)$. Значит, если в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины, то общая точка у них единственная.

4. Принцип Гейне-Бореля для покрытия отрезка.

Говорят, что система $S = \{X_\alpha\}$, $\alpha \in A$, множеств X покрывает множество Y , если $\forall y \in Y \exists X_\alpha: y \in X_\alpha$.

Любое подмножество $S_1 \subset S$ покрытия S множества Y называется подпокрытием Y . Если S_1 не покрывает Y , то оно называется подсистемой системы S .

Л е м м а (Принцип Гейне-Бореля-Лебега): Из любой системы интервалов, покрывающей отрезок из $\mathbb{R}$, можно выделить конечное подпокрытие этого отрезка.

Доказательство: Пусть $S = \{U\}$ — система интервалов U , покрывающая отрезок $[a, b] = I_1$. Если бы отрезок I_1 не допускал покрытия конечным набором интервалов системы S , то, поделив I_1 пополам, мы получили бы, что по крайней мере одна из его половинок, которую мы обозначим через I_2 , тоже не допускает конечного покрытия. С отрезком I_2 проделаем ту же процедуру деления пополам, получим отрезок I_3 и т. д.

Таким образом, возникает последовательность $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ вложенных отрезков, не допускающих конечного покрытия интервалами системы S . Поскольку длина отрезка, полученного на n -м шаге, по построению равна $|I_n| = |I_1| \cdot 2^{-(n+1)}$, то в последовательности $\{I_n\}$ есть отрезки сколь угодно малой длины. По лемме о вложенных отрезках существует точка C , принадлежащая всем отрезкам I_n , $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $C \in I_1 = [a, b]$, то найдется интервал $] \alpha, \beta[= U \in S$ системы S , содержащий точку c , т. е. $\alpha < c < \beta$. Пусть $\epsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\}$. Найдем в построенной последовательности такой отрезок I_n , что $|I_n| < \epsilon$. Поскольку $c \in I_n$ и $|I_n| < \epsilon$, заключаем, что $I_n \subset U =] \alpha, \beta[$. Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечным набором интервалов системы.

6. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

Последовательность $\{X_n\}$ называется фундаментальной или удовлетворяющей условию Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > m, \forall k > m: |X_n - X_k| < \varepsilon$$

Т е о р е м а (Коши): Последовательность $\{X_n\}$ сходится к $\{X_n\}$ фундаментальной последовательности.

Доказательство: Пусть заданная последовательность $\{X_n\}$ сходится к $a (\in \mathbb{R})$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > m$ имеем $|X_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Это же справедливо и для $\forall X_k$ с $k > m$, то есть $|X_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k > m$.

$$\text{Тогда } |X_n - X_k| = |X_n - a + a - X_k| \leq |X_n - a| + |X_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > m, \forall k > m \Rightarrow \{X_n\}$$

- фундаментальная последовательность. Этим доказана необходимость. Докажем достаточность.

Пусть $\{X_n\}$ – фундаментальная последовательность, тогда для $\forall \varepsilon > 0 \exists m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $\forall n > m, \forall k > m: |X_n - X_k| < 1$. ($\varepsilon = 1$). Следовательно, $(-1 + X_k) < X_n < (1 + X_k) \quad \forall n > m, \forall k > m$. Зафиксируем значение $k > m$, например $k = (m + 1)$. Тогда получим, что

$-1 + X_{m+1} < X_n < 1 + X_{m+1} \quad \forall n > m$. За пределами этой окрестности находится только конечное число элементов: $X_1, X_2, \dots, X_m$. Отсюда следует, что $\{X_n\}$ – ограниченная последовательность.

В силу теоремы Больцано – Вейерштрасса из $\{X_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{X_{n_k}\}$, то есть $X_{n_k} \rightarrow a \in \mathbb{R}$ при $k \rightarrow \infty$.

Это значит, что $\forall \varepsilon > 0 \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall N_k > N_p$ имеем $|X_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда получаем $|X_n - a| = |X_n - a + X_{n_k} - X_{n_k}| \leq |X_n - X_{n_k}| + |X_{n_k} - a|$

Считая, что n и n_k выбраны большими, чем $\max\{m, N_p\}$ в силу фундаментальности последовательности $\{X_n\}$ и сходимости $\{X_{n_k}\}$ к a , из последнего неравенства получаем $|X_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow X_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

Пример: Исследуем сходимость последовательности $\{X_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\}$

Применяя критерии Коши, вычислим $|X_{2n} - X_n|$

Имеем:

$$|X_{2n} - X_n| = |1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{критерии Коши не выполняется} \Rightarrow \text{эта последовательность расходится.}$$

9. Число е (число Эйлера)

Существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} * \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} * \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

По примеру Эйлера это уравнение $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ обозначается буквой **е**.

$$\text{Это число } \mathbf{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Первые 15 знаков после запятой :

$e = 2, 718281828459045 \dots$

Д. Неопределенный интеграл.

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Задача о площади криволинейной трапеции.

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, заданной на некотором множестве X , если $F'(x)=f(x)$ для всех $x \in X$. Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то $\Phi(x)$ является первообразной той же функции в том и только в том случае, когда $\Phi(x)=F(x)+C$, где C — некоторая постоянная. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции

Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
3. Неопределенный интеграл от производной функции равен самой функции плюс произвольная постоянная: $\int F'(x)dx = F(x) + C$, что может быть переписано так:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $a = \text{const} (a \neq 0)$, то $\int a * f(x)dx = a * \int f(x)dx$

5. Неопределенный интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме их интегралов: $\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть функция f определена на $[a, b]$ и пусть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Разобьем промежутки $[a, b]$ на n произвольных частей, в каждом частичном промежутке возьмем точку ξ_i ($x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$) и найдем $\Delta S_i = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i) \Delta x_i$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Тогда площадь криволинейной трапеции

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

2. Таблица основных интегралов. Правила интегрирования.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int dx = x + c$ | 11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + c$ |
| 2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$ | 12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c \end{cases}$ |
| 3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | 13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c$ |
| 4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$ | 14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + c$ |
| 5. $\int \cos x dx = \sin x + c$ | 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c \\ -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + c \end{cases}$ |
| 6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$ | 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + c$ |
| 7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$ | 17. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c$ |
| 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$ | 18. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c$ |
| 9. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + c$ | 19. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c$ |
| 10. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + c$ | 20. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c$ |

3. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. $\int u dv = uv - \int v du$

1. В подынтегральной функции логарифм берется за U
2. В подынтегральной функции умножение на экспоненту -за U берется многочлен.
3. умножение на тригонометрическую функцию за U берется многочлен
4. Умножение на тригонометрическую обратную за U берется обратная тригонометрическая.

4. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.

5. Теорема о разложении дробно-рациональной функции на сумму простейших дробей.

6. Интегрирование выражений вида $R(\sqrt{(ax+b)(cx+d)})$.

7. Интегрирование дифференциальных биномов.

Интегрирование дифференциального бинома

N Eliseeva

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx \quad m, n, p \in \mathbb{Q}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Случай 1. $p \in \mathbb{Z}$

- если $p > 0$, то интегрируем непосредственно,
- если $p < 0$, то подстановка $x = t^k$, где k – общий знаменатель дробей m и n .

Случай 2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$

подстановка $ax^n + b = t^s$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{r}{s}$

Случай 3. $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$

подстановка $ax^n + b = t^s x^n$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{r}{s}$

8. Подстановки Эйлера.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad b^2 \neq 4ac$$

R – рациональная функция, зависящая от x и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

$$\int R(t) dt$$

Подстановки Эйлера

1. Если $a > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a} \cdot x$
2. Если $c > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x \cdot t \pm \sqrt{c}$
3. Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2 , то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \cdot (x - x_1)$

9. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

Е. Определенный интеграл Римана и его приложения.

1. Интеграл Римана. Критерий Коши. Необходимое условие интегрируемости, достаточное условие.

В1. Интеграл Римана. Критерий Коши. Необходимое условие интегрируемости, достаточное условие.

Разбиением отрезка $[a, b]$ называется набор точек $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$.

Разбиение обозначают буквой P .

Разбиение может быть снабжено выделенными точками $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Для разбиения с выделенными точками используют обозначение (P, ξ) .

Максимальная длина отрезков $\lambda(P) = \max_{i=1, \dots, n} |x_{i+1} - x_i|$ называется **параметром разбиения**.

Говорят, что **функция** $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **интегрируема по Риману** на $[a, b]$ и ее интеграл равен I , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid \forall (P, \xi) \quad \lambda(P) < \delta \rightarrow \left| I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

(при любом ε больше 0 существует число больше 0, такое что при любом разбиении с выделенными точками и максимальной длине отрезков меньше этого числа будет выполняться условие: модуль интеграла функции минус сумма от $i=1$ до n произведения функции от выделенной точки на Δx_i меньше ε)

Интеграл обозначают через $\int_a^b f(x) dx$, а множество интегрируемых функций на $[a, b]$ через $R[a, b]$.

Сумму $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ называют **интегральной суммой Римана**.

2. Классы функций, интегрируемых по Риману.

*В2. Классы функций, интегрируемых по Риману.

Теорема 1. Любая монотонная функция $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ интегрируема на этом промежутке.

Теорема 2. Любая непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом промежутке.

Теорема 3. Любая кусочно – непрерывная функция на $[a, b]$ интегрируема на $[a, b]$.

Теорема 2. Любая монотонная функция $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ интегрируема на этом промежутке.

Док-во: Если f - пост. ф-ция, то её интегрируемость очевидна ($f(x)=C$), тогда $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = C \sum_{i=1}^n \Delta x_i = C(b-a)$.
 $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = C(b-a)$.

Потому будем считать, что f не const. пост. ф-ция, положим $\sigma = \frac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|}$, где ε - произвольное заданное число > 0 .

Тогда $\sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \Delta x_i < \sigma \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sigma \cdot \left| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))) \right| = \sigma \cdot |f(b) - f(a)| = \frac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|} \cdot |f(b)-f(a)| = \varepsilon$

$\Rightarrow f \in R[a, b]$

Активация
 Чтобы активировать
 "Параметры"

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - ср. ф-ция. Тогда $f \in R[a, b] \Leftrightarrow$
 eius. $\underline{J}$ и $\bar{J}$ и $\underline{J} = \bar{J}$ при этом

$$\underline{J} = \bar{J} = \int_a^b f(x) dx (= J)$$

Док-во: Пусть $\exists \underline{J}, \bar{J}$ и $\underline{J} = \bar{J}$ Тогда из (1)
 ~*~*~* следует

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} S(f; P) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f; (P, \varepsilon)) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} S(f; P)$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\underline{J}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\bar{J}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\bar{J}}$

Пусть $f \in R[a, b]$, т.е. eius. J . Тогда из (4) $\Rightarrow$
 $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} S(f; P) = J$ и из (1) $\Rightarrow$

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f; (P, \varepsilon)) = J = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} S(f; P)$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} S(f; P) = \bar{J} = J$$

Аналогично доказыв. eius-и $\underline{J}$ и пол-то
 $\underline{J} = J$ з.м.г.

Пусть $f \in R[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - ср. ф-ция. Тогда $f \in R[a, b] \Leftrightarrow$
 $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n W(f; \Delta_i) \Delta x_i = 0. \quad (5)$

Док-во: Демонстрируем доказана на друг.
 ~*~*~* лексии.

Далее. (5) означает, что $\sum_{i=1}^n W(f; \Delta_i) \Delta x_i =$

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - орг. ф-ия. Тогда $S(f, P) = \sup_{\xi} \sigma(f, P, \xi)$ (1)
 $S(f, P) = \inf_{\xi} \sigma(f, P, \xi)$ (3)

Док-во. Поскольку в силу (1) для $\forall (P, \xi)$ имеем
 $\sigma(f, P, \xi) \leq S(f, P)$, то остается док-ть, что $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists \xi: \sigma(f, P, \xi) > S(f, P) - \varepsilon$ или
 $S(f, P) < \sigma(f, P, \xi) + \varepsilon$. (4)

До-во. Поскольку $M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x)$, то $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists \xi_i \in \Delta_i: M_i < f(\xi_i) + \frac{\varepsilon}{b-a}, i = \overline{1, n}$

Отсюда находим $\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i < \sum_{i=1}^n \left(f(\xi_i) + \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i =$
 $= \sigma(f, P, \xi) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i}_{\varepsilon}$ Отсюда $\Rightarrow$ (4), а
 сл-но и (2)

3. Суммы и интегралы Дарбу, критерий Дарбу. Критерий Лебега.
4. Свойства интеграла Римана, теорема о среднем значении.
5. Основная теорема интегрального исчисления.
6. Формула Ньютона-Лейбница. Обобщенная первообразная.
7. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
8. Аппроксимация определенного интеграла.
9. Вычисление длины кривой, площади и объема.
10. Кривые в евклидовом пространстве.
11. Кривизна кривой.

Ж. Несобственные интегралы (НИ).

1. НИ, критерий Коши.
2. Признаки сравнения для НИ.
3. Абсолютно и условно сходящийся НИ.
4. Признак Абеля и Дирихле сходимости НИ.

+Суммы и интегралы Дарбу, критерий Дарбу. Критерий (без доказательства).

$f \in R(I) \Leftrightarrow$ 1) f - ограниченная на I функция;

2) множество точек разрыва функции f имеет Лебегову меру нуль, т.е. функция f является непрерывной почти всюду на I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕ БЫЛО НА ЛЕКЦИИ (повезло, повезло...)

Признак Абеля и Дирихле сходимости НИ.

Признак Дирихле.

- **Признак Дирихле.**

1) Пусть $f: [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная функция и $\exists M \in \mathbb{R} : \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M, \forall b > a$

2) $g: [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная дифференцируемая, монотонно убывающая функция, $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Тогда несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство.

5. Интегральный признак сходимости ряда.

6. Понятие главного значения НИ.

Г.1 Производная функции. Механическая и геометрическая интерпретация производной.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 назовем значение предела отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю или:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной называется дифференцированием функции

Механическая интерпретация производной.

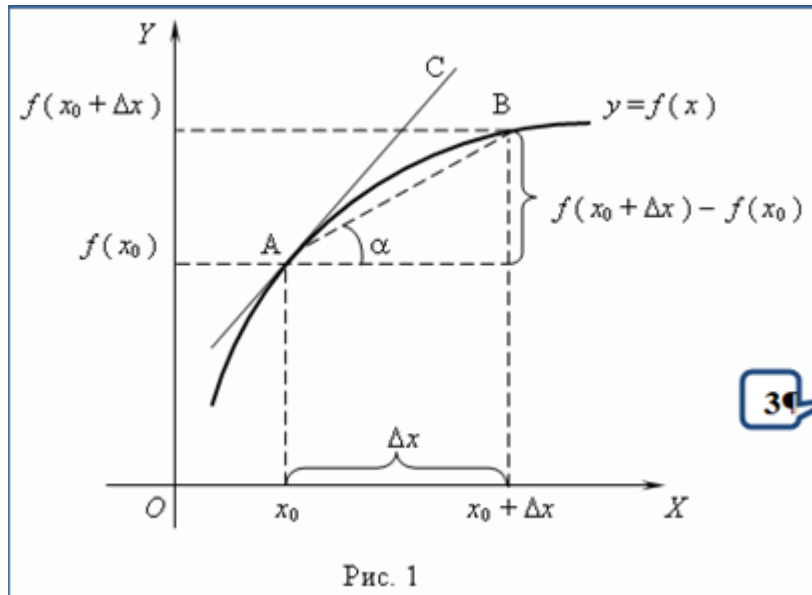
Пусть задан путь $s = f(t)$ движения материальной точки. Скорость данной материальной точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t :

$$v(t) = s'(t)$$

Скорость – это производная координаты по времени. В этом и состоит механический смысл производной. Аналогично, ускорение – это производная скорости по времени: $a = v'(t)$.

Геометрическая интерпретация производной

Производная функции в точке это касательная к графику функции в этой точке.



Г.2 Односторонние производные и их связь с производной функции, бесконечные производные.

Если функция f определена на отрезке $[a, b]$, то предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $x \rightarrow a$ справа (при $x \rightarrow b$ слева) называют производной функции f в точке a справа (в точке b слева). Указанные производные называют односторонними.

Бесконечная производная

Определение: Если функция $y = f(x)$, непрерывна в точке x_0 и

$\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} = \pm\infty$, тогда производная $f'(x_0)$ называется **бесконечной**

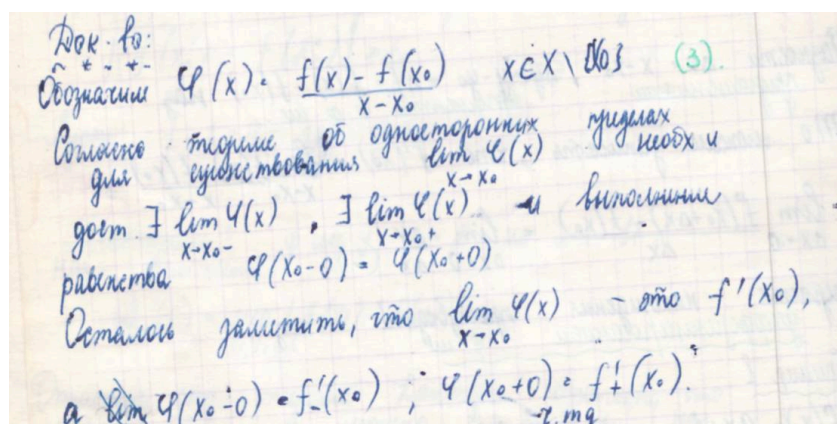
производной.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования производной).

Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 \Leftrightarrow$ в этой точке существуют и равны между собой производные функции справа и слева. Причем

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Доказательство теоремы о существовании $f'(x_0)$



Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке a , то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. По определению производной

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Это предельное равенство означает, что выражение под знаком предела можно представить в виде

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x) + \alpha(x),$$

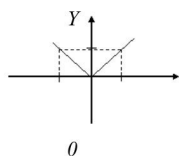
где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$. Тогда

$$f(x) - f(a) = (f'(x) + \alpha(x))(x - a).$$

Следовательно, $f(x) \rightarrow f(a)$ при $x \rightarrow a$.

Обратное утверждение несправедливо — функция, обладающая свойством непрерывности в некоторой точке, не обязательно дифференцируема в этой точке.

Пример. $y = |x|$, $x_0 = 0$.



$$Dx > 0,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

$$Dx < 0,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

В точке $x_0 = 0$ функция непрерывна, но производной не существует.

Г.3 Правила дифференцирования

Опр: Функция $y=f(x)$, имеющая производную в т. x_0 наз. **дифференцируемой** в этой точке. Если функция дифференцируема в любой точке x из X то она наз. Дифференцируемой на множестве X .

Теорема1

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 . Тогда функции $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g (при g не равно 0) дифференцируемы в точке x_0 , причем:

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}, g(x) \neq 0$

Докажем (1).

Пусть $y = f \pm g$. Δf , Δg , Δy – приращения функций в точке x , соответствующие приращению $\Delta x \neq 0$. Тогда:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = [f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)] - [f(x) \pm g(x)] = [f(x+\Delta x) - f(x)] \pm [g(x+\Delta x) - g(x)] = \Delta f \pm \Delta g$$

Таким образом:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f' \pm g'$$

Докажем (2)

Пусть $y = f \cdot g$. Δf , Δg , Δy – приращения функций в точке x , соответствующие приращению $\Delta x \neq 0$. Тогда:

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = (f + \Delta f)(g + \Delta g) - fg = f\Delta g + g\Delta f + \Delta f\Delta g \quad \text{и}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}g \pm \frac{\Delta g}{\Delta x}f + \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g$$

Учитывая, что при $\Delta x \rightarrow 0$ $\Delta g \rightarrow 0$ как приращение непрерывной функции, найдем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}g + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}f + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta g = f'g + g'f$$

Г4. Производная сложной функции

Производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента по x (независимой переменной).

Теорема. Если функция $u = u(x)$ имеет в некоторой точке x_0 производную и принимает в этой точке значение $u_0 = u(x_0)$, а функция $y = f(u)$ имеет в точке u_0 производную $y' = f'(u_0)$, то сложная функция $y = f(u(x))$ в указанной точке x_0 тоже имеет производную, которая равна $y' = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$, где вместо u должно быть подставлено выражение $u = u(x)$.

Доказательство. При фиксированном значении x_0 будем иметь $u_0 = u(x_0)$, $y_0 = f(u_0)$. Для нового значения аргумента $x_0 + \Delta x$:

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0), \Delta y = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0).$$

Т.к. u – дифференцируема в точке x_0 , то u – непрерывна в этой точке. Поэтому при $\Delta x \rightarrow 0$ $\Delta u \rightarrow 0$. Аналогично при $\Delta u \rightarrow 0$ $\Delta y \rightarrow 0$. По условию

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u(u_0)$$

=

Из этого соотношения, пользуясь определением предела, получаем (при $\Delta u \rightarrow 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha,$$

где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta u \rightarrow 0$, а, следовательно, и при $\Delta x \rightarrow 0$.

Перепишем это равенство в виде:

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \cdot \Delta u.$$

Полученное равенство справедливо и при $\Delta u = 0$ при произвольном α , так как оно превращается в тождество $0 = 0$. При $\Delta u = 0$ будем полагать $\alpha = 0$. Разделим все члены полученного равенства на Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$$

По условию

Поэтому переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Теорема доказана.

Г5. Производная обратной и параметрически заданной функции

Производная обратной:

ТЕОРЕМА. Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

$$y = f(x); x = f^{-1}(y); y = f^{-1}(x)$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{x'(y)}$$

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)}; \text{ Аналогично для } x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$$

Производная параметрически заданной:

ТЕОРЕМА:
Если функция y от аргумента x задана параметрически
$$x = \varphi(t) \text{ и } y = \psi(t)$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$
дифференцируемы и $\varphi'(t) \neq 0$, то производная
этой функции есть
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (1)$$

Пусть задана функция: (ψ - пси)

$$x = \varphi(t) \quad t \in I = (\alpha, \beta) \quad (2)$$

$$y = \psi(t)$$

Предположим, что первая из этих функций обратима, то есть:

$$t = \varphi^{-1}(x), x \in \varphi(I)$$

Тогда получим функцию $f(x) = y(t(x)) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Говорят, что функция задана параметрически равенством (1). При этом t называется параметром.

Теорема1:

Пусть задана строго монотонная дифференцируемая ф-ия $\varphi: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $\varphi'(t) \neq 0, t \in I$. и задана диф. ф-ия $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

сложная ф-ия $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ или дифф. в т. $x_0 = \varphi(t_0)$, при этом

$$f'(x_0) = y'|_{x=x_0} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \quad (2)$$

Вывод формулы производной параметрически заданной функции.

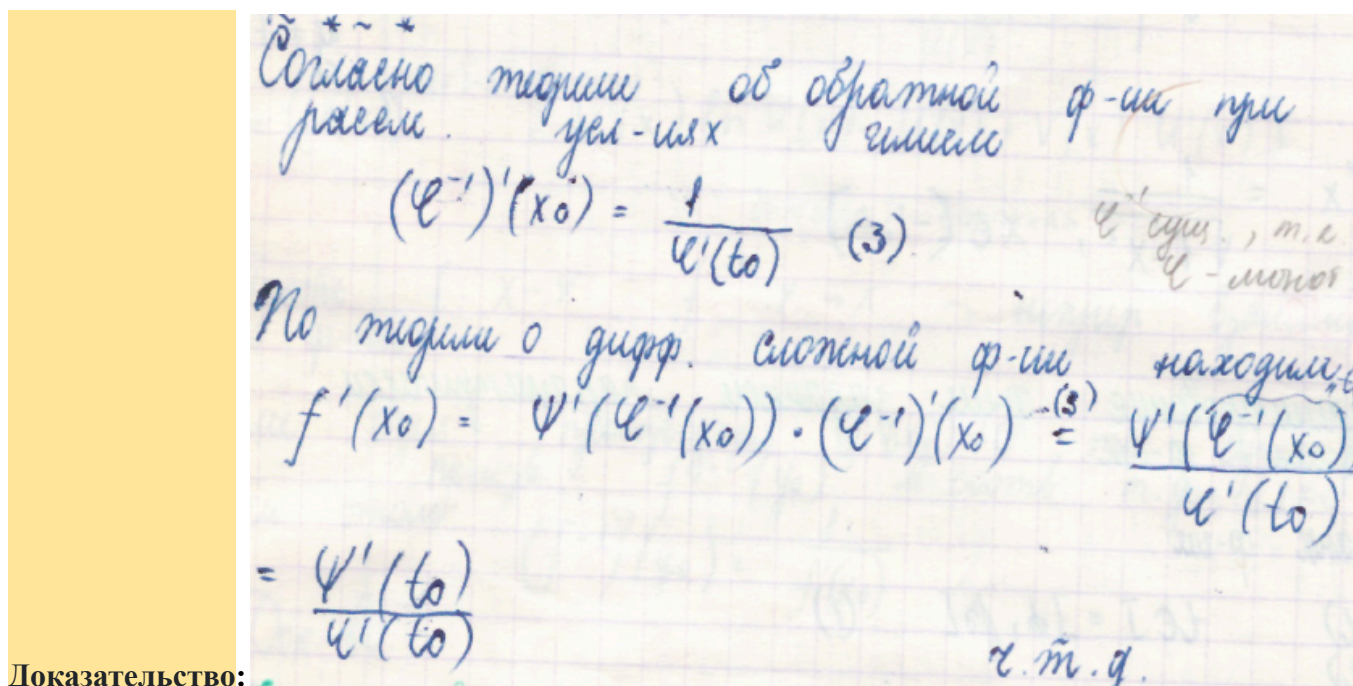
Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ определены и дифференцируемы при $t \in (a; b)$, причем $x'_t = \varphi'(t) \neq 0$ и $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \theta(x)$.

Сначала переходим от параметрического задания к явному. При этом получаем сложную функцию $y = \psi(t) = \psi(\theta(x))$, аргументом которой является x .

По правилу нахождения производной сложной функции имеем:

$y'_x = (\psi(\theta(x)))' = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x)$. Так как $t = \theta(x)$ и $x = \varphi(t)$ обратные функции, то по

формуле производной обратной функции $\theta'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$, поэтому $y'_x = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$



Доказательство:

Г6. Дифференциал и его связь с производной. Геометрический смысл дифференциала

Определение дифференциала

Если существует линейная относительно Δx функция $A(x_0) \cdot \Delta x$ такая, что $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ (4), то выражение $A(x_0) \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции f в т. x_0 и обозначается $df(x_0)$ или dy или $dy(x_0)$.

Теорема

Теорема 1. Если функция [дифференцируема в некоторой точке](#), то в этой точке она имеет [дифференциал](#). P_s (бм - бесконечно малая функция) pss (ниже доказательство по савчину)

По теореме о связи предела и б.м. функции:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ - б.м. функция при $\Delta x \rightarrow 0$.

Умножим обе части на Δx :

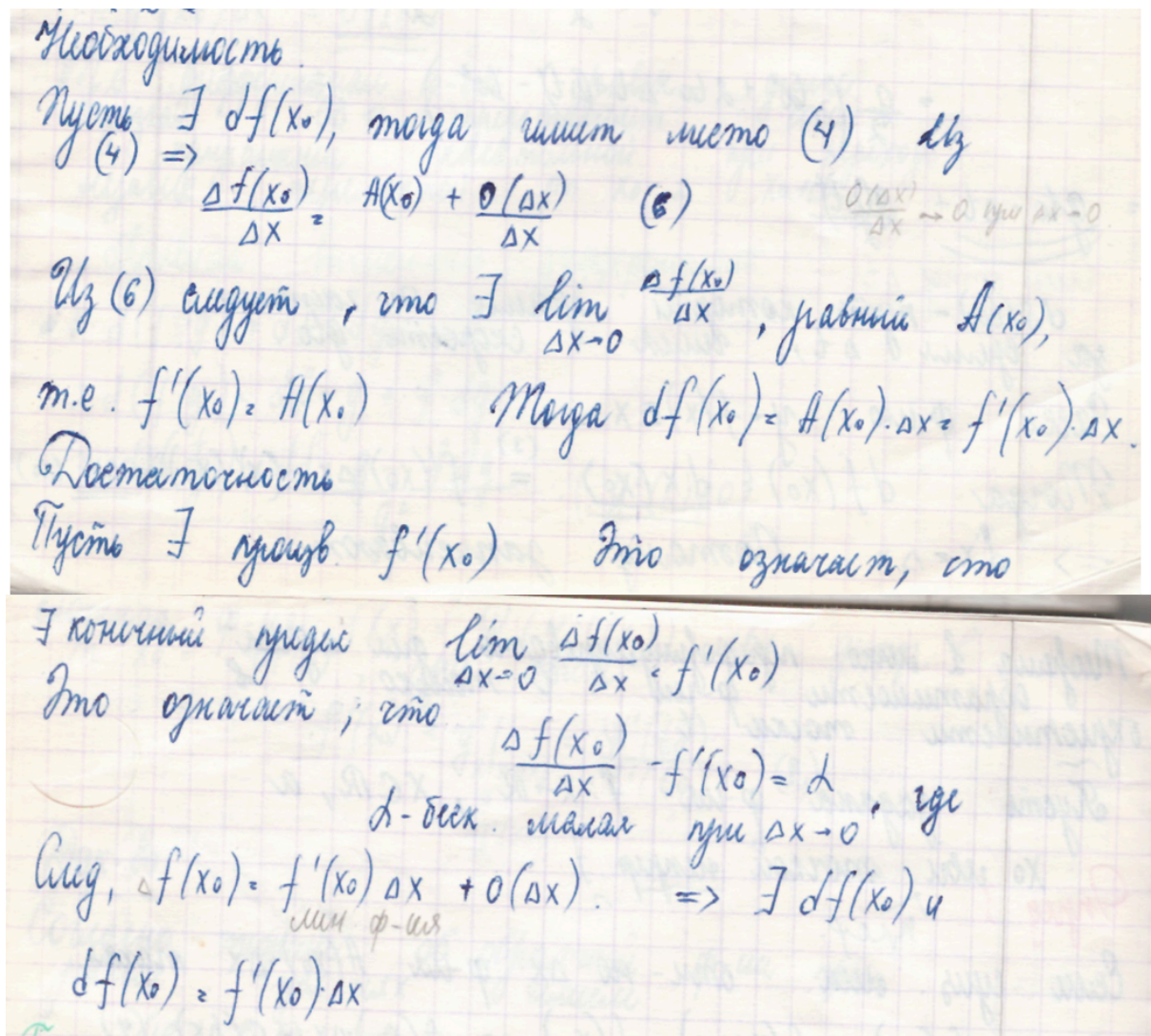
$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

$\alpha(\Delta x)\Delta x$ - б.м. функция более высокого порядка, чем Δx .

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

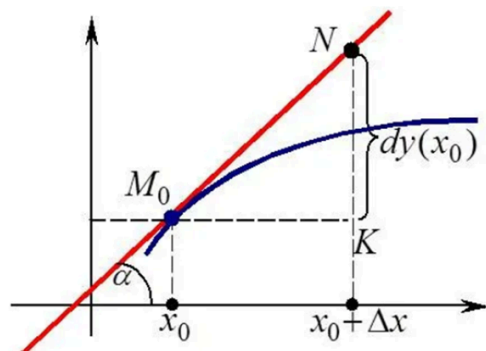
Следовательно, функция имеет дифференциал и $k = f'(x_0)$.

Теорема 2. Если функция имеет дифференциал в некоторой точке, то она имеет производную в этой точке.



Геометрическая интерпретация дифференциала

т.о дифференциал функции равен длине отрезка NK и представляет собой приращение касательной при переходе независимой переменной от x_0 к $x_0 + \Delta x$.



Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$

Из ΔM_0NK получаем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{NK}{M_0K} = \frac{NK}{\Delta x} \rightarrow NK = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x = df(x_0)$

Правила вычисления дифференциала

1. $d(f \pm g) = df \pm dg$
2. $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$
3. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2} \quad (g^2 \neq 0)$

Дифференциал и приближенные значения функции

Поскольку при существовании $df(x_0)$ имеем $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(dx)$, то $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ в достаточно малой окрестности т. x_0 .

Отсюда имеем $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

А) $e^x \approx 1 + x \quad (\text{при } x_0 = 0)$

Б) $\sin(x) \approx x \quad (\text{при } x_0 = 0)$

Г7. Инвариантность формы дифференциала 1-го порядка

Пусть задана сложная функция $y = f(\varphi(x))$.

Формула дифференциала функции имеет вид $dy = y'(x) \cdot dx$, где dx - дифференциал независимой переменной.

Введём дополнительное обозначение $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(u)$ и дифференциал dy с использованием правила дифференцирования сложной функции $y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$ принимает вид $dy = f'(u) \cdot u'(x) \cdot dx$.

Но последние два сомножителя в этом произведении совпадают с дифференциалом функции u , который по определению имеет вид $du = u'(x)dx$, т.е. в новых обозначениях $dy = f'(u) \cdot du$

Таким образом, мы получили формулы одного и того же вида для дифференциала функции $f(\varphi(x))$ от независимой переменной x и для дифференциала функции $f(u)$ от промежуточного аргумента u , представляющего собой дифференцируемую функцию от x . Это и есть свойство инвариантности формы (формулы) первого дифференциала.

Дифференциал функции имеет один и тот же вид: произведение производной по некоторой переменной на дифференциал этой переменной - независимо от того, является ли эта переменная, в свою очередь, функцией другой переменной или она является независимой переменной.

Г8. Производные и дифференциалы высших порядков. Нарушение инвариантности формы дифференциалов высших порядков.

Производные выше 1-го порядка называются производными высших порядков.

Определение 1. Пусть функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ является дифференцируемой на множестве X и пусть $x_0 \in X$. Если при $x = x_0$ у производной $f'(x)$ функции $f(x)$ существует производная, то она называется второй производной (или производной второго порядка) функции f и обозначается $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$.

Определение 2. Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется n раз дифференцируемой на множестве X , если во всех точках этого множества она имеет производные до порядка n включительно.

Аналогично определяется производная $y^{(n)}$ любого порядка $n = 1, 2, \dots$

Заметим, что $y^{(0)} = y$.

Определение производной n -ого порядка функции f в точке x_0 можно записать в виде предела:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Дифференциал n -го порядка функции $y=f(x)$ определяется, как дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка этой функции. Отсюда можно найти производную n -го

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

порядка функции f в т. x :

Нарушение инвариантности формы дифференциалов высших порядков.

Дифференциал высшего порядка (начиная со второго), в отличие от первого дифференциала, не обладает *свойством инвариантности формы*.

Рs(Отметим, что первый дифференциал dy сложной функции $y(u(x))$ сохраняет свою форму, то есть dy равен произведению производной на дифференциал аргумента. Такое свойство называется **инвариантностью формы первого дифференциала**.

Дифференциалы более высоких порядков свойством инвариантности не обладают

Пусть заданы дважды дифференцируемые функции $u=g(x)$, $x \in X$, $y=f(u)$, $u \in U$, так что можно определить сложную функцию $y=f(g(x))$, $x \in X$

Для дифференциала 2-ого порядка получаем:

А) если u - независимая переменная величина, то

$$d^2y(u) \text{ *второй дифференциал*} = f''(u) du^2$$

Б) если $u=g(x)$, то есть u -зависимая переменная:

Первый дифференциал функции y записывается в виде

$$dy = [f(g(x))] dx = f'(g(x)) g'(x) dx.$$

Вычислим второй дифференциал d^2y (считая dx по определению постоянной величиной). Используя **правило дифференцирования произведения функций**, получаем:

$$\begin{aligned} d^2y &= [f'(g(x)) g'(x)] dx^2 = [f''(g(x)) (g'(x))^2 + f'(g(x)) g''(x)] dx^2 \\ &= f''(g(x)) (g'(x) dx)^2 + f'(g(x)) g''(x) dx^2. \end{aligned}$$

Учтем, что

$$g'(x) dx = du \text{ и } g''(x) dx^2 = d^2u.$$

Следовательно,

$$d^2y = f''(u) du^2 + f'(u) d^2u$$

или в краткой форме

$$d^2y = y'' du^2 + y' d^2u.$$

Замечание: в случае линейной функции $u=g(x)=ax+b$ инвариантность формы второго дифференциала d^2u сохраняется, так как ее второй дифференциал равен $d^2u=d^2(ax+b)=0$
Г10. Точки локального экстремума. Теорема Ферма.

1) Точка $x_0 \in X$ называется **точкой локального максимума** функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, если существует окрестность точки $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(x) \leq f(x_0)$ для $\forall x \in (X \cap U(x_0)) \equiv U_x(x_0)$

- 2) Точка $x_0 \in X$ называется **точкой локального минимума** функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, если существует окрестность точки $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(x) \geq f(x_0)$ для $\forall x \in (X \cap U(x_0)) \equiv U_x(x_0)$
- 3) Точка $x_0 \in X$ называется **точкой строгого локального максимума** функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, если существует окрестность точки $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(x) < f(x_0)$ для $\forall x \in U_x(x_0) \setminus \{x_0\}$
- 4) Точка $x_0 \in X$ называется **точкой строгого локального минимума** функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, если существует окрестность точки $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(x) > f(x_0)$ для $\forall x \in U_x(x_0) \setminus \{x_0\}$
- 5) Точка $x_0 \in X$ называется **внутренней точкой** множества X , если она принадлежит X вместе с некоторой своей окрестностью.

А15.Остаточный член формулы Тейлора в форме Коши, Лагранжа и Пеано.

Пусть существует $f^{(n)}(x_0)$ (производная функции $f(x_0)$ высшего порядка n). Тогда в некоторой окрестности $U(x_0)$ можно написать равенство:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(f, x) = P_n(f, x) + r_n(f, x) \quad (1)$$

которое называется **формулой Тейлора** функции f в точке x_0 , где $P_n(f, x)$ называется **многочленом Тейлора**, а $r_n(f, x)$ - **остаточным членом** Тейлора (после n -го члена).

Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$, то согласно определению сходимости ряда (1) сходится к функции $f(x)$ в точке x .

Теорема:

Пусть $\exists f^{(n)}(x_0), f' \in \dot{U}(x_0)$. Тогда в окрестности $\dot{U}(x_0)$:

$$(r_n(f, x))' = r_{n-1}(f', x)$$

Доказательство:

$$(r_n(f, x))' = (f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k)' =$$

$$f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{(k-1)} = r_{n-1}(f', x)$$

Теорема. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Пусть $x > x_0$ ($x < x_0$), $n \in \mathbb{N}_0$, $f^{(n)}$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]$ ($[x, x_0]$), $\exists f^{(n+1)}$ на интервале (x_0, x) ((x, x_0)). Тогда справедлива формула Тейлора (1), в которой

$$r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

где $0 < \theta < 1$.

Доказательство: будем проводить по индукции, считая $x > x_0$. При $n = 0$ теорема утверждает, что при некотором $\theta \in (0, 1)$ (тета)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0).$$

Это утверждение верно, так как оно совпадает с формулой конечных приращений Лагранжа:

Формула конечных приращений, или теорема Лагранжа о среднем значении, утверждает, что если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема в интервале $(a; b)$, то

найдётся такая точка c на интервале $(a; b)$, что $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Предположим, что утверждение верно при $n - 1$ ($n \geq 0$) и установим, что оно верно и при n . Используя теорему Коши о среднем значении и лемму, имеем (для определенности $x > x_0$)

$$\begin{aligned} \frac{r_n(f, x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{r_n(f, x) - r_n(f, x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} = \\ &= \frac{r_{n-1}(f', \xi)}{(n+1)(\xi - x_0)^n} = \frac{(f')^{(n)}(\eta)}{(n+1)n!} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

где $x_0 < \xi < x$, а предпоследнее равенство написано в силу предположения индукции. Теорема доказана.

Теорема. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\exists f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедлива формула (1), в которой $r_n(f, x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство: будем проводить по индукции:

При $n=1$ утверждение теоремы верно. В самом деле, в этом случае f дифференцируема в точке x_0 . Следовательно, $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$.

Что совпадает с условием теоремы. Предположим, что утверждение теоремы верно при $n - 1 (n \geq 1)$ и покажем, что это верно и для n .

Используя теорему Лагранжа о конечных приращениях и лемму, имеем (считая для определенности $x > x_0$):

$$r_n(f, x) = r_n(f, x) - r_n(f, x_0) = r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0), \text{ где } x_0 < \xi < x.$$

По предположению индукции: $r_{n-1}(f', \xi) = o((\xi - x_0)^{n-1})$ при $x \rightarrow x_0$

Следовательно, $r_n(f, x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$ ч.т.д.

Теорема. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (другой вариант доказательства).

Теорема. Остаточный член $R_n(x)$ разложения функции по формуле Тейлора является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $(x - x_0)^n$ при $x \rightarrow x_0$: $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$.

Иначе говоря, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Доказательство. Выражение под знаком предела в последнем уравнении представляет

собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$, для раскрытия которой можно использовать правило

Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}.$$

Повторно применяя правило Лопиталя, получаем цепочку равенств, приводящих к доказываемому утверждению:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

Теорема. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши.

$$r_n(x_0; x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n(x - x_0).$$

ξ (кси) – это точка между x и x_0 .

PS Мы этого не доказывали, да и доказательство слишком большое

A16.Разложение по формуле Тейлора функций $\exp(x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\mu$ в степени μ .

1. $f(x) = \sin x$

1. Напишем формулу Маклорена для функции $f(x) = \sin x$.

Так как $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$ (см. п. 11.1), то

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k + 1, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0.$$

2. $f(x) = \cos x$

2. Для функции $f(x) = \cos x$ имеем аналогично $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2)$,

$$f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k+1, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

3. $f(x) = \exp(x)$

3. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Так как $(e^x)^{(n)} = e^x$, то $f^{(n)}(0) = 1$ и, следовательно,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

4. $f(x) = (1+x)^a$ в степени μ (a)

4. Если $f(x) = (1+x)^a$, $a \in \mathbf{R}$, $a \notin \mathbf{N}$, то

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n}.$$

Поэтому

$$f^{(n)}(0) = a(a-1)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad f(0) = 1;$$

отсюда

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \quad (14.25)$$

Если $a = m$ - натуральное число, то при $n \geq m$ будем иметь $(1+x)^m = P_m(x)$, где $P_m(x)$ - многочлен степени m . Отсюда, согласно теореме единственности, следует, что $P_m(x)$ является многочленом Тейлора, и, следовательно, в силу (14.25)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \dots + x^m,$$

т. е. в этом случае формула (14.25) превращается в формулу бинома Ньютона.

5. $f(x) = \ln(1+x)$

5. Пусть $f(x) = \ln(1+x)$; тогда

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = (-1)(1+x)^{-2},$$

вообще, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$, поэтому

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!, \quad + O(x^{2n+3})$$

и так как $f(0) = 0$, то

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

A17. Выпуклые и вогнутые функции. Точки перегиба.

График функции $y=f(x)$ называется **выпуклым** на интервале $(a; b)$, если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале.

График функции $y=f(x)$ называется **вогнутым** на интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале.

Рассмотрим **достаточный признак**, позволяющий установить, будет ли график функции в данном интервале выпуклым или вогнутым.

Теорема. Пусть $y=f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$. Если во всех точках интервала $(a; b)$ вторая производная функции $y=f(x)$ отрицательная, т.е. $f''(x) \leq 0$, то график функции на этом интервале выпуклый, если же $f''(x) > 0$ – вогнутый.

Доказательство. Предположим для определенности, что $f''(x) \leq 0$ и докажем, что график функции будет выпуклым.

Возьмем на графике функции $y=f(x)$ произвольную точку M_0 с абсциссой $x_0 \in (a; b)$ и проведем через точку M_0 касательную. Ее уравнение $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Мы должны показать, что график функции на $(a; b)$ лежит ниже этой касательной, т.е. при одном и том же значении x ордината кривой $y=f(x)$ будет меньше ордината касательной.

Итак, уравнение кривой имеет вид $y=f(x)$. Обозначим $\bar{y}$ ординату касательной, соответствующую абсциссе x . Тогда $\bar{y} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Следовательно, разность ординат кривой и касательной при одном и том же значении x будет $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Разность $f(x) - f(x_0)$ преобразуем по теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где c между x и x_0 .

Таким образом, $y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0)$.

К выражению, стоящему в квадратных скобках снова применим теорему Лагранжа: $y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, где c_1 между c и x_0 . По условию теоремы $f''(x) \leq 0$. Определим знак произведения второго и третьего сомножителей.

1. Предположим, что $x > x_0$. Тогда $x_0 < c_1 < c < x$, следовательно, $(x - x_0) > 0$ и $(c - x_0) > 0$. Поэтому $y - \bar{y} < 0$.
2. Пусть $x < x_0$, следовательно, $x < c < c_1 < x_0$ и $(x - x_0) < 0$, $(c - x_0) < 0$. Поэтому вновь $y - \bar{y} < 0$.

Таким образом, любая точка кривой лежит ниже касательной к кривой при всех значениях x и $x_0 \in (a; b)$, а это значит, что кривая выпукла. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

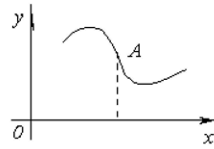
Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная, если она существует, пересекает кривую, т.к. с одной стороны от этой точки кривая лежит под касательной, а с другой стороны – над ней.

Определим **достаточные условия того, что данная точка кривой является точкой перегиба**.

Теорема. Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через значение $x = x_0$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка графика функции с абсциссой $x = x_0$ есть точка перегиба.

Доказательство. Пусть $f''(x) \leq 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Тогда при $x < x_0$ кривая выпукла, а при $x > x_0$ – вогнута. Следовательно, точка A , лежащая на кривой, с абсциссой x_0 есть точка перегиба. Аналогично можно рассматривать второй случай, когда $f''(x) \geq 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$.



Таким образом, точки перегиба следует искать только среди таких точек, где вторая производная обращается в нуль или не существует.

А.18. Условия монотонности функции.

(Критерий монотонности функции, имеющей производную на интервале)

Пусть функция $f(x) \in C((a, b))$ непрерывна на (a, b) и имеет в каждой точке $x \in (a, b)$ производную $f'(x)$ Тогда

f не убывает на (a, b) тогда и только тогда, когда $\forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0$;

f не возрастает на (a, b) тогда и только тогда, когда $\forall x \in (a, b) f'(x) \leq 0$.

(Достаточное условие строгой монотонности функции, имеющей производную на интервале)

Пусть функция $f(x) \in C((a, b))$ непрерывна на (a, b) и имеет в каждой точке $x \in (a, b)$ производную $f'(x)$ Тогда

если $\forall x \in (a, b) f'(x) > 0$, то f строго возрастает на (a, b) ;

если $\forall x \in (a, b) f'(x) < 0$, то f строго убывает на (a, b) .

Обратное, вообще говоря, неверно. Производная строго монотонной функции может обращаться в ноль. Однако, множество точек, где производная не равна нулю, должно быть плотно на интервале (a, b) Точнее имеет место

(Критерий строгой монотонности функции, имеющей производную на интервале) Пусть $f(x) \in C((a, b))$ и всюду на интервале определена производная

$f'(x)$ Тогда f строго возрастает на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1. $\forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0$;
2. $\forall (c, d) \subset (a, b) \exists x \in (c, d) f'(x) > 0$.

Аналогично, f строго убывает на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1. $\forall x \in (a, b) f'(x) \leq 0$;
2. $\forall (c, d) \subset (a, b) \exists x \in (c, d) f'(x) < 0$.

А19. Экстремумы функций. Необходимые условия. Достаточные условия локального экстремума.

Наибольшее или наименьшее значение функции на промежутке называется **глобальным экстремумом**.

Значение функции в точке максимума называется **локальным максимумом**, значение функции в точке минимума - **локальным минимумом** данной функции. Локальные максимум и минимум функции называются **локальными экстремумами**.

Точка x_0 называется **точкой локального максимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство: $f(x) \leq f(x_0)$.

Точка x_0 называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности $f(x) \geq f(x_0)$.

Необходимое условие экстремума

Теорема

(Необходимое условие экстремума)

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то ее производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых производная равна нулю: $f'(x)=0$, называются **стационарными точками функции**.

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума для непрерывной функции, называются **критическими точками** этой функции. То есть **критические точки** - это либо стационарные точки (решения уравнения $f'(x)=0$), либо это точки, в которых производная $f'(x)$ не существует.

Первое достаточное условие экстремума

(Первое достаточное условие экстремума)

Пусть для функции $y = f(x)$ выполнены следующие условия:

функция непрерывна в окрестности точки x_0 ;

$f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует;

производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет свой знак.

Тогда в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет экстремум, причем это минимум, если при переходе через точку x_0 производная меняет свой знак с минуса на плюс; максимум, если при переходе через точку x_0 производная меняет свой знак с плюса на минус.

Второе достаточное условие экстремума

(Второе достаточное условие экстремума)

Пусть для функции $y = f(x)$ выполнены следующие условия:

она непрерывна в окрестности точки x_0 ;

первая производная $f'(x) = 0$ в точке x_0 ;

$f''(x) \neq 0$ в точке x_0 .

Тогда в точке x_0 достигается экстремум, причем, если $f''(x_0) > 0$, то в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет минимум; если $f''(x_0) < 0$, то в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ достигает максимум.

А20.Правила Лопиталю.

Теорема (правило Лопиталю). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a , и пусть

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ Тогда, если существует предел

отношения производных этих функций $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ то существует и предел отношения

самих функций $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow a$, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (1)$$

Таким образом, коротко **правило Лопиталю можно сформулировать следующим образом:** предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных.

Замечание. Отметим, что формула (1) справедлива только в том случае, если предел, стоящий справа, существует. Может случиться, что предел, стоящий слева существует, в то время как предел, стоящий в правой части равенства, не существует.

Например, найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ Этот предел существует

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

Но отношение производных $(1 + \cos x)/1 = 1 + \cos x$ при $x \rightarrow \infty$ не стремится ни к какому пределу.

Заметим, что если отношение производных опять представляет собой неопределенность вида $0/0$ или ∞/∞ , то можно снова применить сформулированную теорему, то есть перейти к отношению вторых производных и так далее.

A21.Асимптоты. Схема построения графиков функций (с использованием производных).

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на всех $x > a$ (соответственно для всех $x < a$). Если существуют такие числа k и l , что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + l)] = 0, \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + l)] = 0 \right),$$

то прямая $y = kx + l$ называется **невертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$).

Коэффициенты k и l находятся следующим образом:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$$

$$\left(k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad l = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) \right).$$

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности или проколотой окрестности точки x_0 (быть может, односторонней) и пусть выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$$

Тогда прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции f .

Схема построения графика функции $y = f(x)$.

1. Область допустимых значений.

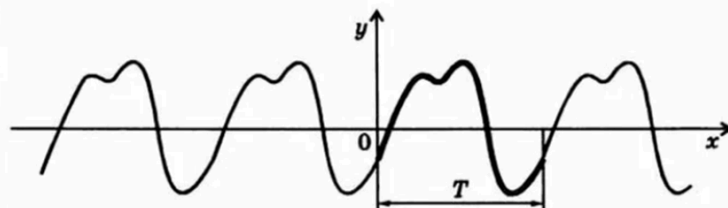
Примеры функций, непрерывных на всей области определения	
Функция	Область определения
$y = x$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = x^n$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = \frac{1}{x-a}$	$x \neq a$
$y = \sqrt{x}$	$x \geq 0$
$y = \log_a x \begin{pmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{pmatrix}$	$x > 0$
$y = \sin x$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = \cos x$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$y = \arcsin x; y = \arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$
$y = a^x$	$x \in (-\infty; +\infty)$

2. Периодичность.

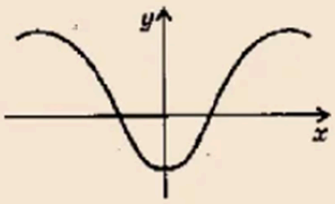
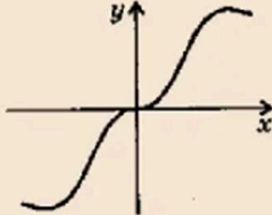
Функция $f(x)$ называется **периодической** с периодом $T > 0$, если для любого x из области определения значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T).$$

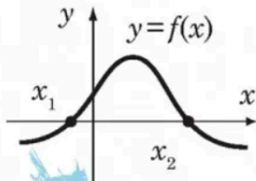
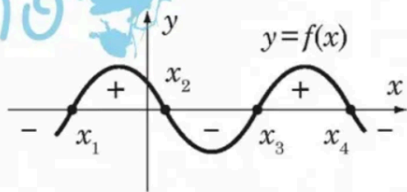
При этом любое число вида Tn , где $n \in \mathbb{N}$, также является периодом этой функции.



3. Чётность/нечётность функции.

Функция называется четной, если: • область определения функции симметрична относительно нуля, • для любого x из области определения $f(-x) = f(x).$  График четной функции симметричен относительно оси y.	Функция называется нечетной, если: • область определения функции симметрична относительно нуля, • для любого x из области определения $f(-x) = -f(x).$  График нечетной функции симметричен относительно начала координат.
---	---

4. Нули функции, интервалы знакопостоянства.

Нули функции — это значения аргумента, при которых значение функции равно нулю: $f(x) = 0$	
Промежутки знакопостоянства — промежутки, на которых все значения функции положительны (отрицательны). Чтобы их найти, достаточно решить неравенство $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$	

5. Точки разрыва функции.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции $y=f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A_2$

При этом: а) если $A_1 = A_2$,

то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**

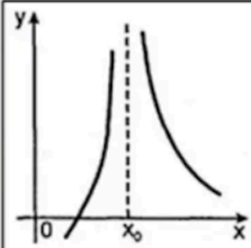
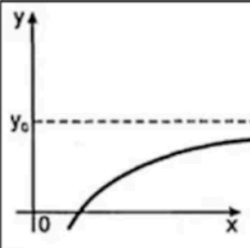
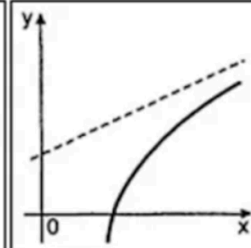
б) если $A_1 \neq A_2$

то точка x_0 называется **точкой конечного разрыва**

Величину $|A_1 - A_2|$ называют **скачком функции** в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $y=f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

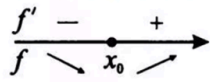
6. Асимптоты.

Виды асимптот		
Вертикальная $x = x_0$	Горизонтальная $y = y_0$	Наклонная $y = kx + b$ ($k \neq 0$)
		
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0$	$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x};$ $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$

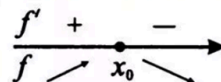
7. Экстремумы

- найти область определения;
- найти производную функции на этой области;
- определить нули и точки, где функция не существует;
- определение знака производной на интервалах;
- выбрать точки, где функция меняет знак.

Если производная непрерывной функции меняет знак при переходе через точку $x = x_0$, причем в точке $x = x_0$ производная равна нулю или не существует, то точка $x = x_0$ - точка экстремума (точка минимума или точка максимума).



Точка минимума



Точка максимума

8. Выпуклость, точки перегиба.

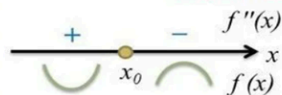
1. Найти вторую производную функции.
2. Найти точки в которых $f''(x)=0$ или не существует.
3. Исследовать знак $f''(x)$ слева и справа от найденных точек.
4. Найти значения функции в точках перегиба.

Найдем $f''(x)$. Если на некотором интервале

$f''(x) > 0$, то $f(x)$ выпукла вниз.

$f''(x) < 0$, то $f(x)$ выпукла вверх.

Точки, в окрестности которых $f''(x)$ меняет знак, называются **точками перегиба**.



x_0 - точка перегиба



MyShared

Теорема: две дифференцируемые на промежутке X функции F и Φ являются первообразными одной и той же функции в том и только том случае, когда они отличаются на постоянную: $F(x)=\Phi(x)+C$, $x \in X$, $C=\text{const}$

· Совокупность всех первообразных функции f на промежутке X называется **неопределенным интегралом** от функции f и обозначается $\int f(x)dx$

Если F – какая-либо первообразная функции f на X , то записывают $\int f(x)dx=F(x)+C$

$f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Тогда площадь криволинейной трапеции

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$