Chapitre XII : Somme des variables aléatoires

Objectifs :

- Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples
- Calculer l'espérance d'une va, notamment en utilisant la propriété de linéarité
- Calculer la variance d'une va, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes
- Modéliser une situation probabiliste

Histoire des maths :

Pafnouti Lvovitch Tchebychev (16 mai 1821, Okatovo - 8 décembre 1894, Saint-Pétersbourg est un mathématicien russe.
Issu d'une famille de militaires, riche et cultivée, il est d'abord éduqué chez ses parents. Il reçoit alors de très bons enseignements en mathématiques, mais aussi en français ce qui lui permettra plus tard d'échanger facilement avec les mathématiciens occidentaux. Son enfance est marquée par un handicap (il a une jambe plus longue que l'autre) qui l'empêche de pratiquer certaines activités, et aussi d'envisager une carrière militaire.

En 1837, il entre à l'université de Moscou, où il apprend les mathématiques sous la direction de Brashman. Alors qu'il commence à obtenir ses premiers résultats, sa situation financière change dramatiquement en 1841 quand une famine frappe durement la Russie. Même s'il vit désormais misérablement, Tchebychev persiste à continuer ses études. Il soutient sa thèse en 1846, où il poursuit le programme de Bernoulli et de Poisson consistant à donner un cadre théorique aux théorèmes limites des probabilités.

I. Somme de variables aléatoires

Rappel : définition VA
Une variable aléatoire réelle X définie sur l'univers Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans ℝ. $X: \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \to X(\omega)$

Exemple : On lance une pièce de monnaie, si on obtient pile, on gagne 5€ sinon on perd 2€.
On peut définir une VA sur $\Omega = \{pile, face\}$ par $X(pile) = 5$ et $X(face) = -2$

Définition : Produit d'une VA par un réel
Soit X une VA définie sur Ω et a un nombre réel. On peut définir une variable aléatoire aX telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $(aX)(\omega) = a \times X(\omega)$.

Exemple : On lance un dé équilibré à six faces et le nombre de points obtenus est le résultat du dé multiplié par 5.
On note X la VA correspondant au résultat du dé et Y celle aux points obtenus alors $Y = 5X$
$X: \Omega \to \mathbb{N}$; $"obtenir\ 1" \to 1$; $"obtenir\ 2 \to 2,$ ... donc Y: $"obtenir\ 1" \to 5 \times 1 = 5$, $"obtenir\ 2" \to 2 \times 5 = 10$

Définition : Somme de VA
Soient X et Y deux VA définies sur Ω On peut définir une variable aléatoire Z telle que pour tout ω ∈ Ω, $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$. On note $Z = X + Y$

Exemple 1 : On lance 5 dés équilibrés et on compte la somme des nombres obtenus.
Soit X la VA correspondant à cette somme, alors on peut écrire $X = X_1 + ... + X_5$
où X_k correspond au résultat du dé numéro k pour $k \in [1\ ;\ 5]$. Attention : $X \neq 5X_1$

Exemple 2 : Deux jeux dont les gains sont donnés :
- 1er jeu : la variable aléatoire X prend les valeurs 1€ et 2€.
- 2e jeu : la variable aléatoire Y prend les valeurs -2€, 3€ et 4€.

$(X = 1) \cap (Y = -2)$ signifie qu'on a gagné 1€ au premier jeu et perdu 2€ au 2e jeu.

La VA somme $X + Y$ donne le gain total et prend les valeurs : -1, 0, 4, 5 et 6.
Ainsi $X + Y = 0$ avec $(X = 2) \cap (Y = -2)$

Définition : Loi de probabilité d'un somme de VA
Soient X et Y deux variables aléatoires. La loi de probabilité de la VA somme $X + Y$ est donnée par : $$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P((X = i) \cap (Y = j))$$ Si de plus, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors : $$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i) \times P(Y = j)$$

Remarque : Explication de $\sum_{i+j=k}$

Par exemple si $k = 2$,

$$\sum_{i+j=2} P((X = i) \cap (Y = j)) = P((X = 0) \cap (Y = 2)) + P((X = 1) \cap (Y = 1)) + P((X = 2) \cap P(Y = 0))$$

Exemple : On considère le jeu qui se déroule en deux parties :
- 1ère partie : Lancer d'une pièce. Si on tombe sur "pile", on gagne 1€, et "face" on gagne 2€.
- 2e partie : Lancer d'un dé à 6 faces. Si on tombe sur un "chiffre pair", on gagne 1€, si on tombe sur "3" ou "5" on gagne 2€, si on tombe sur "1" on perd 5€.

On désigne par X les gains de la 1ère partie et Y les gains de la 2e.
On considère que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

On présente toutes les sommes possibles dans le tableau :

Y\X	1	2
-5	-4	-3
1	2	3
2	3	4

ainsi $P(X + Y = 3) = P((X = 1) \cap (Y = 2)) + P((X = 2) \cap (Y = 1))$

$= P(X = 1) \times P(Y = 2) + P(X = 2) \times P(Y = 1)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$

II. Espérance et variance d'une somme de VA

Théorème : Linéarité de l'espérance
Soient X et Y deux VA définies sur le même univers Ω et a un nombre réel : • $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ • $E(aX) = aE(X)$ • $E(aX+Y) = aE(X) + E(Y)$ linéarité de l'espérance

Exemple : On joue à un jeu en deux étapes

- phase 1 : on lance un dé équilibré à 6 faces, si le résultat est 1 ou 6, on gagne 9 pts, sinon on perd 6 pts
- phase 2 : On lance une pièce équilibré, si on obtient face, on gagne 6 pts sinon on perd 2 pts.

Soit X la VA correspondant au nombre total de points. Calculer E(X).

- Soit X_1 la VA correspondant au gain de la phase 1 et X_2 celle au gain de la phase 2
- Loi de probabilité de X_1 : $P(X_1 = -6) = \frac{2}{3}$ et $P(X_1 = 9) = \frac{1}{3}$
- Loi de probabilité de X_2 : $P(X_2 = -2) = \frac{1}{2}$ et $P(X_2 = 6) = \frac{1}{2}$

Calcul des espérances : $E(X_1) = -6\times\frac{2}{3} + 9\times\frac{1}{3} = -1$ et $E(X_2) = -2\times\frac{1}{2} + 6\times\frac{1}{2} = 2$

donc $E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = -1 + 2 = 1$

Théorème : Variance
Soit X une VA définie sur l'univers Ω de variance V(X) et a un nombre réel : Par définition : $V(X) = \sum_{i=1}^{s} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$ alors $V(aX) = a^2 V(X)$

Exemple : Soit X une VA de variance $V(X) = 5$, alors $V(2X) = 2^2 V(X) = 4\times 5 = 20$

Définition : VA indépendantes
Soient X et Y des VA à valeurs respectives dans E_1 et E_2, on dit que X et Y sont indépendantes lorsque pour tous $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$: $P(X = x_1 \cap Y = x_2) = P(X = x_1)\times P(Y = x_2)$

Propriété : Variance et VA indépendantes
Soient X et Y deux VA indépendantes définies sur Ω alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Exercice : On reprend le même que précédemment

$V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = 50$ et $V(X_2) = \frac{1}{2}(-2-2)^2 + \frac{1}{2}(6-2)^2 = 16$

Les VA X_1 et X_2 sont indépendantes donc $V(X) = V(X_1) + V(X_2) = 50 + 16 = 66$

III. Applications à la loi binomiale

Propriété : Somme de VA suivant même loi de Bernoulli

Si X_1, X_2, ..., X_n sont des VA indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètres p, alors $X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Démonstration :
Pour tout X_i, si l'on considère l'événement "obtenir 1" de probabilité p comme succès alors $X_1 + X_2 + ... + X_n$ donne le nombre de succès lorsqu'on réalise n fois de manière indépendante une même expérience de Bernoulli.
Donc $X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Propriété : Décomposition d'une VA suivant une loi binomiale

Pour X suivant une loi $B(n\,;\,p)$, on a $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ où les VA X_1, X_2, ..., X_n sont des VA indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

Propriété

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors :
- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration :
Soit X une VA suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Alors il existe n VA de Bernoulli de paramètre p telles que $X = X_1 + ... + X_n$
Pour tout $i \in [1\,;\,n]$, $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$
Or $E(X) = E(X_1) + ... + E(X_n) = np$
Les variables aléatoires X_1, ..., X_n sont indépendantes, par définition du schéma de Bernoulli donc
$V(X) = V(X_1) + ... + V(X_n) = np(1-p)$
de plus $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$

Exemple : Si X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,2$

$E(X) = 20 \times 0,2 = 4$

$V(X) = 20 \times 0,2 \times (1 - 0,2) = 3,2$

$\sigma(X) = \sqrt{3,2} \approx 1,79$