**Câu 49:** **[1D4-1.1-3] (THTT số 6 - 2018)** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $u_1=0$ và $u_{n+1}=u_n+4n+3$, $\forall n\geq 1$. Biết

$$\lim\frac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{4n}}+\sqrt{u_{4^2n}}+\ldots+\sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{2n}}+\sqrt{u_{2^2n}}+\ldots+\sqrt{u_{2^{2018}n}}}=\frac{a^{2019}+b}{c}$$

với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên dương và $b<2019$. Tính giá trị $S=a+b-c$.

**A.** $S=-1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=2017$. **D.** $S=2018$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có

$u_2=u_1+4.1+3$

$u_3=u_2+4.2+3$

...

$u_n=u_{n-1}+4.(n-1)+3$

Cộng vế theo vế và rút gọn ta được

$u_n=u_1+4.(1+2+\ldots+n-1)+3(n-1)=4\frac{n(n-1)}{2}+3(n-1)=2n^2+n-3$, với mọi $n\geq 1$.

Suy ra

$u_{2n}=2(2n)^2+2n-3$

$u_{2^2n}=2(2^2n)^2+2^2n-3$

...

$u_{2^{2018}n}=2(2^{2018}n)^2+2^{2018}n-3$

và

$u_{4n}=2(4n)^2+4n-3$

$u_{4^2n}=2(4^2n)^2+4^2n-3$

...

$u_{4^{2018}n}=2(4^{2018}n)^2+4^{2018}n-3$

Do đó $\lim\frac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{4n}}+\sqrt{u_{4^2n}}+\ldots+\sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{2n}}+\sqrt{u_{2^2n}}+\ldots+\sqrt{u_{2^{2018}n}}}$

$$=\lim\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}+\sqrt{2.4^2+\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}}+\ldots+\sqrt{2\left(4^{2018}\right)^2+\frac{4^{2018}}{n}-\frac{3}{n^2}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}+\sqrt{2.2^2+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}+\ldots+\sqrt{2\left(2^{2018}\right)^2+\frac{2^{2018}}{n}-\frac{3}{n^2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(1+4+4^2+\ldots+4^{2018}\right)}{\sqrt{2}\left(1+2+2^2+\ldots+2^{2018}\right)}=\frac{1\frac{1-4^{2019}}{1-4}}{\frac{1-2^{2019}}{1-2}}=\frac{1}{3}\frac{4^{2019}-1}{2^{2019}-1}=\frac{2^{2019}+1}{3}.$$

Vì $2^{2019} > 2019$ cho nên sự xác định ở trên là duy nhất nên $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$

Vậy $S = a + b - c = 0$ .