

Câu 49: [1D4-1.1-3] (THTT số 6 - 2018) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và

$$u_{n+1} = u_n + 4n + 3, \quad \forall n \geq 1. \text{ Biết}$$

$$\lim \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2 n}} + \dots + \sqrt{u_{4^{2018} n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2 n}} + \dots + \sqrt{u_{2^{2018} n}}} = \frac{a^{2019} + b}{c}$$

với a, b, c là các số nguyên dương và $b < 2019$. Tính giá trị $S = a + b - c$.

A. $S = -1$.

B. $S = 0$.

C. $S = 2017$.

D. $S = 2018$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có

$$u_2 = u_1 + 4 \cdot 1 + 3$$

$$u_3 = u_2 + 4 \cdot 2 + 3$$

...

$$u_n = u_{n-1} + 4 \cdot (n-1) + 3$$

Cộng vế theo vế và rút gọn ta được

$$u_n = u_1 + 4 \cdot (1 + 2 + \dots + n-1) + 3(n-1) = 4 \frac{n(n-1)}{2} + 3(n-1) = 2n^2 + n - 3, \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Suy ra

$$u_{2n} = 2(2n)^2 + 2n - 3$$

$$u_{2^2 n} = 2(2^2 n)^2 + 2^2 n - 3$$

...

$$u_{2^{2018} n} = 2(2^{2018} n)^2 + 2^{2018} n - 3$$

và

$$u_{4n} = 2(4n)^2 + 4n - 3$$

$$u_{4^2 n} = 2(4^2 n)^2 + 4^2 n - 3$$

...

$$u_{4^{2018} n} = 2(4^{2018} n)^2 + 4^{2018} n - 3$$

$$\lim \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2 n}} + \dots + \sqrt{u_{4^{2018} n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2 n}} + \dots + \sqrt{u_{2^{2018} n}}}$$

Do đó

$$= \lim \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{2 \cdot 4^2 + \frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}} + \dots + \sqrt{2(4^{2018})^2 + \frac{4^{2018}}{n} - \frac{3}{n^2}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{2 \cdot 2^2 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}} + \dots + \sqrt{2(2^{2018})^2 + \frac{2^{2018}}{n} - \frac{3}{n^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} (1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2018})}{\sqrt{2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2018})} = \frac{1 - 4^{2019}}{1 - 2^{2019}} = \frac{1 - 4}{1 - 2} = \frac{1 \cdot 4^{2019} - 1}{3 \cdot 2^{2019} - 1} = \frac{2^{2019} + 1}{3}.$$

Vì $2^{2019} > 2019$ cho nên sự xác định ở trên là duy nhất nên
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy $S = a + b - c = 0$.