موضوع الاختبار رقم 15 لتحضير امتحان شهادة البكالوريا
شعبة الرياضيات

التمرين الأول:(5 نقاط)

I/ علما أن: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$

II/ لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\frac{\ln x}{x^2}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ ، (وحدة الطول هي $2cm$)

1/ لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=x^3-1+2\ln x$

أ(أدرس اتجاه تغير الدالة h على المجال $]0;+\infty[$.

ب(أحسب $h(1)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$.

2/ أ(أحسب نهاية الدالة f عندما x يؤول إلى 0 وعندما x يؤول إلى $+\infty$.

ب(عين f' الدالة المشتقة للدالة f و انشئ جدول تغيراتها.

3/ أ(بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) .

ب(أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ج(أرسم كل من المنحنى (C) والمستقيم (Δ) في المعلم السابق.

التمرين الثاني: (5 نقاط)

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z^2-2z+2=0$.

2/ لتكن النقط K ، L ، M التي لواحقها على الترتيب: $z_K=1+i$ ، $z_L=1-i$ ، $z_M=-i\sqrt{3}$

علم هذه النقاط في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ ،(الوحدة هي $4cm$).

3/ أ(تحقق أن z_N لاحقة النقطة N نظيرة النقطة M بالنسبة للنقطة L هي: $2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$

ب(نعتبر الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ حيث: $r(M)=A$ و $r(N)=B$

عين اللاحقتين z_A و z_C للنقطتين A و B على الترتيب.

ج (نعتبر الانسحاب t ، لاحقة شعاعه $2i$ حيث: $t(M)=D$ و $t(N)=B$ عين اللاحقتين z_D و z_B للنقطتين D و B على الترتيب.

4/ أ(بين أن النقطة K منتصف القطعة المستقيمة $[DB]$ هي منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$.

ب(بين أن: $\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=i$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث: (5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقاط $A(1;1;0)$ و $B(1;2;1)$ و $C(3;-1;2)$

1/ أ(أثبت أن النقاط A ، B و C تشكل مستويا.

ب(بين أن المستوي (ABC) معادلته الديكارتية هي: $2x+y-z-3=0$.

2/ نعتبر المستويين (P) و (Q) معادلتيهما على الترتيب $x+2y-z-4=0$ و $2x+3y-2z-5=0$.

أثبت أن المستويين (P) و (Q) يتقطعان وفق مستقيم (D) يطلب كتابة تمثيلا وسيطيا له.

3/ عين تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q).

4/ أوجد المسافة بين النقطة A و المستقيم (D).

التمرين الرابع: (5 نقاط)

1/ أ|(عين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من Z^2 حلول المعادلة: $8x-5y=3$: (E)

ب(ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد ثنائية $(p;q)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $m=8p+1$ و $m=5q+4$ ، بين أن الثنائية $(p;q)$ هي حل للمعادلة (E) ، واستنتج أن: $m\equiv 9[40]$

ج(عين أصغر عدد طبيعي m أكبر من 2000 .

2/ ليكن n عددا طبيعيا.

أ(أثبت أنه من أجل عدد طبيعي k لدينا: $2^{3k}\equiv 1[7]$.

ب (ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2009} على 7 ؟

3/ ليكن a و b عددان طبيعيان أقل من أو يساوي 9 مع $a\neq 0$ ، ونعتبر العدد N حيث: $N=a\times 10^3+b$.علما أنه في النظام العشري العدد N يكتب $N=\overline{a00b}$.

نريد تعيين من ضمن هذه الأعداد الطبيعية N تلك التي تقبل القسمة على 7 .

أ (تحقق من أن: $10^3\equiv -1[7]$.

ب(استنتج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7 في الحالة $a\equiv 2[7]$ و $b\equiv 2[7]$.

تصحيح موضوع الاختبار رقم 15 لتحضير امتحان شهادة البكالوريا
شعبة الرياضيات

التمرين الأول(05 نقاط)

I -ليكن $x>1$ و n طبيعي لدينا: $1<x\le x^n$ ومنه $0<\frac{1}{x^n}\le\frac{1}{x}$ لأن دالة المقلوب متناقصة على $]0;+\infty[$ نستنتج أن: $0\le\frac{\ln x}{x^n}\le\frac{\ln x}{x}$ ومنه $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ ..... $(0,5)$

II/ 1 أ(دراسة إتجاه تغير الدالة h على المجال $]0;+\infty[$ ..... $(0,5)$

h قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $h'(x)=3x^2+\frac{2}{x}$ وهي موجبة تماما

ومنه الدالة h متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

ب(إشارة $h(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ..... $(0,5)$

لدينا $h(1)=0$ و $h(x)<0$ من أجل $0<x<1$، و $h(x)>0$ من أجل $x>1$.

2/ دراسة تغيرات f.

أ($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ باستعمال نتيجة السؤال I و $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ ..... $(0,5)$

ب(من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=\frac{h(x)}{x^3}$

وهذا يعني أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$

جدول تغيرات f ..... (01)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3/ (المستقيم المقارب المائل ..... $(0,5)$

من أجل $x>0$ لدينا: $f(x)-x=\frac{\ln x}{x^2}$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$ نستنتج عندئذ أن (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C).

ب(وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ) ..... $(0,5)$

من أجل كل $x>0$ ، لدينا $f(x)-x=-\ln x\times\frac{1}{x^2}$

ومنه إشارة الفرق $f(x)-x$ من إشارة $-\ln x$

ومنه : (C) فوق (Δ) في المجال $]0;1[$.

(C) تحت (Δ) في المجال $]-\infty;1[$.

(C) و (Δ) يتقاطعان عند النقطة التي فاصلتها 1 .

ج(إنشاء كل من (C) و (Δ) ..... (01)

التمرين الثاني (05 نقاط)

1/ للمعادلة (E) حلان مترافقان وهما: $z_1=1-i$ و $z_2=1+i$ ..... $(0,75)$

2/ تعليم النقاط K ، L و M

3/ أ(بما أن N نظيرة M بالنسبة للنقطة L فإن: $\overrightarrow{LN}=-\overrightarrow{LM}$ أي $z_N-z_L=-z_M+z_L$ ومنه $z_N=-z_m+2z_L=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$ ..... $(0,75)$

ب($r(O;\frac{\pi}{2})$ حيث: $r(M)=A$ أي $z_A=az_M+b$ أي $z_A=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(-i\sqrt{3}\right)=i\left(-i\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}$

$r(N)=C$ يعني $z_C=az_N$

ومنه $z_C=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(2+i\left(\sqrt{3}-2\right)\right)=\left(2-\sqrt{3}\right)+2i$ ..... $(0,75)$

ج(لدينا $t(M)=D$ يعني $z_D=z_M+b$ ومنه $z_D=i\left(2-\sqrt{3}\right)$ و $t(N)=B$ يعني

$z_B=z_N+b$ ومنه $z_B=2+i\sqrt{3}$ ..... $(2\times0,5)$

4/ أ(لدينا $\frac{z_D+z_B}{2}=1+i=z_K$ ومنه K منتصف $[BD]$ و $\frac{z_A+z_C}{2}=1+i=z_K$ ومنه K منتصف $[AC]$ ..... $(2\times0,5)$

ب(واضح أن: $\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه نستنتج أن: $KB=KC$ و $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{KC}\right)=\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن الرباعي $ABCD$ مربع ..... $(0,75)$

التمرين الثالث:(05 نقاط)

1/ أ(لدينا $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا، ومنه النقاط A ، B و C ليست في استقامية ..... $(0,75)$

ب(المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) :

يكفي التأكد من أن إحداثيات النقاط A ، B و C تحقق المعادلة $2x+y-z-3=0$ .... $(0,75)$

2/ دراسة التقاطع: الشعاع $\vec{n}(1;2;-1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) ، كذلك $\vec{n'}(2;3;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q) واضح أن الشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ ليسا مرتبطين خطيا فالمستويين (P) و (Q) متقاطعان في مستقيم (D) .

بحل الجملة $\begin{cases} x+2y-z-4=0 \\ 2x+3y-2z-5=0 \end{cases}$ نجد الجملة $\begin{cases} x=2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases} \quad (t \in IR)$ وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) تقاطع المستويين (P) و (Q) ..... $(1,5)$

3/ إن تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) هو تقاطع (ABC) والمستقيم (D) إذن، نبحث عن نقطة M تنتمي إلى التقاطع المطلوب إحداثياتها تحقق الجملة: $\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \\ 2x+y-z-3=0 \end{cases}$

بحل هذه الجملة نجد التقاطع في نقطة وحيدة E إحداثياتها $(2;3;4)$ ..... (01)

4/ المسافة بين النقطة A و المستقيم (D) : لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) لدينا $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (D) .

إن: $\overrightarrow{AH}$ و $\vec{u}$ متعامدان إذن $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ ومنه $H\left(-\frac{1}{2};3;\frac{3}{2}\right)$.

نحسب عندئذ AH نجد $AH=\frac{\sqrt{34}}{2}$ وهي المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) ..... (01)

التمرين الرابع: (05 نقاط)

1/ أ(واضح أن الثنائية $(1;1)$ هي حل خاص للمعادلة (E) ، عندئذ نجد $x=5k+1$ و $y=8k+1$ حيث k عدد صحيح ..... (01)

ب(من المعطيات فإن الأعداد الصحيحة m و p و q تحقق العلاقة $8p=m-1$ و $5q=m-4$ وهذا يعني أن: $8p-5q=3$ ومنه الثنائية $(p;q)$ حل للمعادلة (E) وبالتالي يوجد عدد صحيح k حيث $p=5k+1$ ومنه $m=8p+1$ أي $m=8(5k+1)+1=40k+9$ وهذا يعني أن: $m\equiv 9[40]$ .... (01)

ج(نضع $40k+9\geq 2000$ أي $k\geq 49,775$ ومنه يجب أن يكون $k=50$ وهذا يعطي القيمة المطلوبة لـ m وهي $m=2009$ ..... $(0,5)$

2/ أ(لدينا $2^3=8$ أي $2^3\equiv 1[7]$ ومنه $2^{3k}\equiv 1[7]$ ..... $(0,5)$

ب ($2^{2009}=2^{3\times 669}\times 2^2\equiv 1\times 4[7]$ ومنه $2^{2009}\equiv 4[7]$ ..... $(0,5)$

3/ أ(واضح أن $10^3\equiv -1[7]$ لأن ($10^3+1=1001=7\times 143$) ..... $(0,5)$

ب (من النتيجة السابقة فإن: $a\times 10^3\equiv -a[7]$ إذن $a\times 10^3+b\equiv -a+b[7]$ ولدينا

$N=a\times 10^3+b$ أيضا N يقبل القسمة على 7 إذا وفقط إذا كان $a\equiv b[7]$

توجد سبع حالات للدراسة قيم N من أجل $a\equiv 2[7]$ و $b\equiv 2[7]$ ، من أجل هذه الحالة يكون لدينا

$a=2$ أو $a=9$ و $b=2$ أو $b=9$

أربعة قيم ممكنة للعدد الطبيعي N وهي: $2002;2009;9002;9009$ ..... (01)