Partie 2 Probabilités

1. Définitions

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire le résultat. L'**ensemble fondamental** (ou **univers**) d'une expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience. Cet ensemble est en général noté Ω. Il peut être fini, dénombrable, ou infini non dénombrable. Chaque élément ω de Ω est une réalisation de l'expérience, nommée aussi **issue** ou **événement élémentaire**.

Exemples

- On lance un dé, on s'intéresse au chiffre obtenu. L'ensemble fondamental est fini : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
- On jette une pièce autant de fois que nécessaire pour obtenir une fois « face ». L'ensemble fondamental est alors infini dénombrable : $\Omega = \{F; PF; PPF; PPPF; PPPPF...\}$.
- On choisit au hasard un point sur une demi-droite et on regarde la distance entre ce point et l'origine de la demi-droite. L'ensemble fondamental est infini non dénombrable : $\Omega = [0; +\infty[$

Pour chaque expérience, on peut définir des **événements** réalisés par une, plusieurs ou même aucune issue.
Un événement réalisé par **aucune issue** est un **événement impossible.**
Un événement B réalisé par **toutes les issues** est un **événement certain**.

Exemple

On lance un dé à 6 faces et on regarde le résultat indiqué sur la face supérieure.
« Tirer un nombre pair » (événement A) est un événement lié à cette expérience. $A = \{2; 4; 6\}$
« Tirer un nombre » (événement B) est un événement **certain**. $B = \Omega$
« Ne tirer aucun nombre » (événement C) est un événement **impossible**. $C = \emptyset$

Deux événements sont **INCOMPATIBLES** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.
Autrement dit, deux événements A et B sont incompatibles si $A\cap B = \emptyset$
Deux événements sont **CONTRAIRES** s'ils sont incompatibles et si leur réunion est l'univers tout entier.
Autrement dit, deux événements A et B sont contraires si $A\cap B = \emptyset$ et si $A\cup B = \Omega$.
On note alors $A = \Omega\backslash B = \overline{B}$

Remarque

$A\cap B$ est l'événement qui réalise l'événement A et l'événement B en même temps (autrement dit, l'ensemble qui contient tous les éléments qui sont à la fois dans A et dans B).
$A\cup B$ est l'événement qui réalise l'événement A ou l'événement B ou A et B en même temps (autrement dit, l'ensemble qui contient tous les éléments qui sont soit dans A soit dans B soit dans A et B).
$A\backslash B = A\cap\overline{B}$ est l'événement qui réalise l'événement A mais pas l'événement B (autrement dit, l'ensemble qui contient tous les éléments qui sont dans A mais pas dans B).

Une **probabilité P** sur Ω est une application sur l'ensemble des événements telle que

- $P(\Omega) = 1$
- Pour tout événement A, $0\leq P(A)\leq 1$
- Pour toute suite d'événements **incompatibles** $\left(A_i\right)_{i\in N}$

$$P\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) = \sum_{i\in N} P(A_i)$$

De cette définition, on peut tirer plusieurs propriétés.

Propriété 1
- *Si $B\subset A$, alors $P(A\backslash B) = P(A) - P(B)$*
- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Si A est un événement impossible, $P(A) = 0$

Preuve

- Soit $B \subset A$. Les événements $A \backslash B$ et B sont incompatibles.
  $P(A) = P(A \backslash B \cup B) = P(A \backslash B) + P(B)$
  Donc $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$
- Les événements $A \backslash A \cap B$, $B \backslash A \cap B$ et $A \cap B$ sont incompatibles.
  $P(A \cup B) = P(A \backslash A \cap B) + P(B \backslash A \cap B) + P(A \cap B)$
  $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)$
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\overline{A}) = P(\Omega \backslash A) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$
- Soit A est un événement impossible.
  $P(A) = P(\emptyset) = P(\Omega \backslash \Omega) = P(\Omega) - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

Si **Ω est discret**, la **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des issues qui le compose. La probabilité de chaque issue est souvent induite par l'expérience aléatoire.
Par exemple, la probabilité d'obtenir un nombre impair avec un dé à 6 faces équilibré (non truqué) est de $\frac{3}{6}$.
La probabilité d'obtenir un valet en tirant une carte dans un jeu de 52 cartes est de $\frac{4}{52}$.
Si toutes les issues ont la même chance de se produire, on est dans une **situation d'équiprobabilité**.
Par exemple, si on lance un dé à six faces équilibré (non truqué) et si on regarde le nombre obtenu, il s'agit d'une situation d'équiprobabilité : on a autant de chance de faire 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
Si on regarde la somme des résultats du lancer de 2 dés à six faces, ce n'est pas une situation d'équiprobabilité : on a plus de chances d'obtenir 7 que 2 (il n'y a que 11 issues).
Par contre, si l'on s'intéresse au résultat de chacun des dés en distinguant les 2 dés, il s'agit d'une situation d'équiprobabilité. Il y a 36 issues : (1;1) ; (1;2) ; (1;3)…

Une propriété est aussi souvent utilisée, c'est la **formule des probabilités totales**.

Formule des probabilités totales
Si $\left\{E_1; E_2; ...; E_n\right\}$ désigne un système complet d'événements (ou partition) sur Ω, c'est-à-dire

$$E_i \cap E_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$
$$E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = \Omega$$

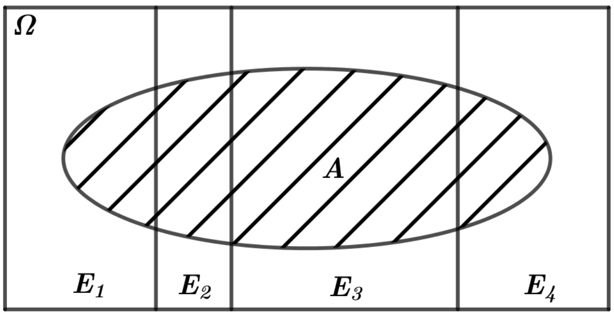
Alors

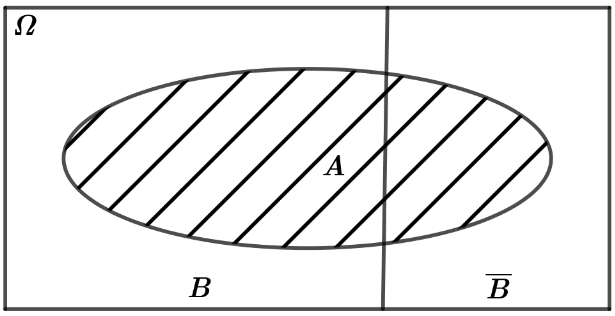
$$P(A) = P\left(A \cap E_1\right) + P\left(A \cap E_2\right) + ... + P\left(A \cap E_n\right)$$

En particulier, $\{B; \overline{B}\}$ est une partition de Ω, donc

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

Cas particuliers illustrés par des diagrammes de Venn (cas $n = 4$ et $n = 2$)





2. Probabilité conditionnelle

Définition 1
Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$.On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est

notée $P_A(B)$ et est définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

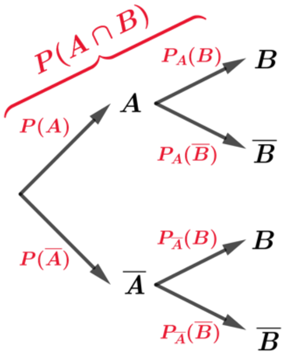
Remarque

$P_A(B)$ se note aussi $P(B/A)$

La probabilité conditionnelle suit les règles et lois de probabilités vues auparavant.
En particulier, soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$.

- $0 \leq P_A(B) \leq 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

  Cette dernière formule s'illustre aisément sur l'arbre pondéré ci-contre.
- **Si** $A \cap B = \emptyset$ **alors** $P_A(B) = P_B(A) = 0$



De la définition, on déduit aisément la formule de Bayes.

Formule de Bayes

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

Combinée avec la formule des probabilités totales, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

On obtient la formule suivante

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}$$

Application aux tests de dépistage

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion **d'une personne malade sur 10 000**. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est **malade**, **le test est positif à 99%**. Si une personne n'est **pas malade**, **le test est positif à 0,1%**. Ces chiffres ont l'air excellents, vous ne pouvez qu'en convenir. Toutefois, avant d'autoriser la commercialisation de ce test, vous faites appel au statisticien du ministère : ce qui vous intéresse, ce n'est pas vraiment les résultats présentés par le laboratoire, c'est la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif. La formule de Bayes permet de calculer cette probabilité. On note M l'événement « La personne est malade » et T l'événement « Le test est positif ». Le but est de calculer $P_T(M)$. Les données que vous avez en main sont

$$\begin{aligned} P(M) &= 0,0001 \\ P(\overline{M}) &= 0,9999 \\ P_M(T) &= 0,99 \\ P_{\overline{M}}(T) &= 0,001 \end{aligned}$$

La formule de Bayes donne

$$P_T(M) = \frac{P_M(T)P(M)}{P_M(T)P(M) + P_{\overline{M}}(T)P(\overline{M})} = \frac{10^{-4} \times 0,99}{10^{-4} \times 0,99 + 0,9999 \times 10^{-3}} \simeq 0,09$$

C'est catastrophique ! Seulement **9%** des personnes positives au test sont effectivement malades ! C'est tout le problème des tests de dépistage pour des maladies rares : ils doivent être excessivement performants, sous peine de donner beaucoup trop de « faux-positifs ».

3. Indépendance d'événements

Définition 2

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$. Les événements A et B sont indépendants si

$$P_A(B) = P(B)$$

Par exemple, dans l'exemple précédent, les événements T et M sont dépendants car $P_T(M) \neq P(M)$

Remarque

Pour montrer que les événements A et B sont indépendants, on peut aussi montrer que (si $P(B)\neq 0$)

$$P_B(A) = P(A)$$

Ou

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$