

Si vous notez des erreurs, merci de nous les signaler.

2002 CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE MP PHYSIQUE 1

A. Thermodynamique : étude d'un climatiseur pour avion pressurisé

A.I. Bilan énergétique de la cabine.

A.I.1) λ en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

A.I.2) En utilisant la résistance thermique "linéaire": $T_e - T_c = \frac{4 E}{\lambda \pi D^2} \theta_{th}$.

A.I.3) En utilisant la résistance thermique "cylindrique" (à démontrer) $T_e - T_c = \frac{\ln \frac{D+2E}{D}}{2 \pi \lambda L} \theta_{th}$.

Remarque: comme $E \ll D$, on pourrait prendre la valeur approchée en utilisant la résistance "linéaire":

$$T_e - T_c = \frac{E}{\lambda \pi L D} \theta_{th}.$$

A.I.4) $(\Phi_{th})_t = 2 (\Phi_{th})_b + (\Phi_{th})_c$, d'où l'expression de la conductance thermique:

$$a = \lambda \left[\frac{D^2}{E} + \frac{2 \pi L}{\ln \frac{D+2E}{D}} \right], \text{ soit } a = 520 \text{ W.K}^{-1}.$$

A.I.5) Bilan en régime stationnaire: $P_t = -N_p P_p - (\Phi_{th})_t$.

En haute altitude: $(P_t)_{\text{altitude}} = 29,3 \text{ kW}$ (> 0 car il faut réchauffer la cabine).

Au sol: $(P_t)_{\text{sol}} = -19,0 \text{ kW}$ (< 0 car il faut refroidir la cabine).

A.II. Travail minimum à fournir pour climatiser et pressuriser l'avion.

A.II.1) Pendant Δt , il entre $n = d_n \Delta t$ moles d'air, et $Q_2 = P_t \Delta t$, soit: $Q_2 = P_t \frac{n}{d_n}$.

A.II.2) $n = d_p \frac{1}{V} N_p$; $d_n = d_p N_p \frac{p_c}{R T_c}$; $d_n = 28,7 \text{ mol.s}^{-1}$.

A.II.3)a) $\delta W = -p_{ext} dV_{\text{syst}}$, d'où: $W_{pe} = p_e V_e$.

b) $W_{pc} = -p_c V_c$.

c) $\Delta U = W + Q = W_u + W_p + Q_1 + Q_2 = p_e V_e - p_c V_c + W_u + Q_1 + Q_2$. Or $H = U + p V$, donc:

$$\Delta H = W_u + Q_1 + Q_2.$$

A.II.4)a) $c_p - c_v = R$ et $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$ donnent: $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ et $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$.

b) Pour un gaz décrit par le modèle du gaz parfait: $dH = n c_p dT$ donc: $\Delta H = n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_c - T_e)$.

c) $Q_1 + Q_2 + W_u = \Delta H = n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_c - T_e)$.

A.II.5)a) $dU = \delta W_{\text{rév}} + \delta Q_{\text{rév}} = -p dV + T dS$, donc $dH = V dp + T dS$, ce qui donne:

$$dS = n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} - n R \frac{dp}{p} = d\left(n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln(T) - n R \ln(p)\right), \text{ d'où:}$$

$$S(T, p) = n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln(T) - n R \ln(p) + \text{cste}, \text{ donc } \alpha = n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} \text{ et } \beta = -n R.$$

b) $dS = \delta_{\text{éch}} S + \delta_{\text{créé}} S$, avec: $\delta_{\text{éch}} S = \sum \frac{\delta Q}{T_i}$. Pendant Δt , $S_{\text{éch}} = \frac{Q_2}{T_c} + \frac{Q_1}{T_e}$, donc:

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_c} + \frac{Q_1}{T_e} + S_{\text{créé}}.$$

c) $S_{\text{créé}} \geq 0$, donc: $\Delta S \geq \frac{Q_2}{T_c} + \frac{Q_1}{T_e}$, avec $\Delta S = n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_c}{T_e} - n R \ln \frac{p_c}{p_e}$, d'où:

$$n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_c}{T_e} - n R \ln \frac{p_c}{p_e} \geq \frac{Q_2}{T_c} + \frac{Q_1}{T_e}.$$

A.II.6) $W_u = n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_c - T_e) - Q_1 - Q_2$, donc:

$$W_u \geq n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_c - T_e) - T_e \left[n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_c}{T_e} - n R \ln \frac{p_c}{p_e} - \frac{Q_2}{T_c} \right] - Q_2.$$

De plus: $P_u = \frac{W_u}{\Delta t}$, $n = d_n \Delta t$ et $P_t = \frac{Q_2}{\Delta t}$, donc:

$$P_u \geq d_n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(T_c - T_e - T_e \ln \frac{T_c}{T_e} \right) + d_n R T_e \ln \frac{p_c}{p_e} + P_t \left(\frac{T_c}{T_e} - 1 \right).$$

A.II.7) $(P_u)_{\text{altitude}} \geq 70,2 \text{ kW}$; $(P_u)_{\text{sol}} \geq -0,14 \text{ kW}$ (il n'y a pas besoin des sources d'énergie de l'avion dans ce dernier cas).

A.III. Machine utilisée

A.III.1) $P_t = d_n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_a - T_c)$, donc: $T_a = T_c - \frac{a}{d_n c_p} (T_e - T_c)$.

A.III.2)a) $\Delta H = Q + W_u$ avec $Q = 0$ (adiabatique), donc: $W_u = n_i R \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_f - T_i)$.

b) La transformation est adiabatique, réversible, le gaz est décrit par le modèle du gaz parfait et γ

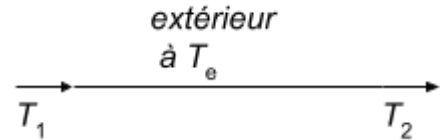
est supposé constant, on peut utiliser la loi de Laplace: $\frac{p_f}{p_i} = \left(\frac{T_f}{T_i}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$.

c) Pour le compresseur: $\frac{p_1}{p_e} = \left(\frac{T_1}{T_e}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. Pour la turbine: $\frac{p_c}{p_1} = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. Donc: $\frac{p_c}{p_e} = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$.

d) Dans la vanne de détente: $W_u = 0$, donc $T_4 = T_1$. Si la transformation était réversible, on aurait: $\frac{p_c}{p_1} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1$, ce qui n'est pas le cas, donc la transformation ne peut pas être réversible.

A.III.3)a) Si $T_e > T_1$, l'échange thermique se fera de l'extérieur vers

le fluide, donc $T_2 > T_1$ et $T_2 < T_e$ donc $1 < \frac{T_2}{T_1} < \frac{T_e}{T_1}$.



Si $T_e < T_1$, l'échange thermique se fera du fluide vers l'extérieur, donc $T_2 < T_1$ et $T_2 > T_e$ donc. $\frac{T_e}{T_1} < \frac{T_2}{T_1} < 1$.

Dans les deux cas: $0 < e < 1$, on peut rajouter les cas $T_1 = T_e$, $T_e = T_2$, $T_1 = T_2$ pour les cas limites, ce qui donne: $0 \leq e \leq 1$.

b) $T_2 = T_1 + e(T_e - T_1)$.

A.III.4)a) Le système $S_1 + S_2$ étant isolé: $0 = \Delta H = n_1 c_p (T_a - T_3) + n_2 c_p (T_a - T_4)$, donc:

$$T_a = \frac{n_1 T_3 + n_2 T_4}{n_1 + n_2}.$$

b) $x_1 = \frac{n_1}{n}$ donne: $T_3 = \frac{T_a - (1 - x_1) T_1}{x_1}$ car $T_4 = T_1$.

A.III.5)a) Le III.1) donne, avec $d_n = 28,74 \text{ mol.s}^{-1}$: $T_a = 282,3 \text{ K}$, $A = 0,92, \dots$

b) Le III.2.c donne, au sol où $p_c = p_e$: $\frac{T_1}{T_e} = \frac{T_2}{T_3}$, donc: $X = \frac{x_1 [X + e(1 - X)]}{A - (1 - x_1) X}$.

c) $n_2 = 0$ est le plus économique, car la transformation non isentropique se fait pour les n_2 moles dans la vanne de détente.

d) Si $x_1 = 1$: $X = \frac{X + e(1 - X)}{A}$, d'où $e = e_{\max} = \frac{X(A - 1)}{1 - X}$.

e) On prend $e_{\max} = 0,7$ (?), on déduit $X = 1,14$, puis $T_1 = 350 \text{ K}$ (349,6), $T_2 = 321 \text{ K}$ (320,5).

Compresseur: $P_{cu} = x_1 d_n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_1 - T_e) = 0,852 \text{ kW}$.

Turbine: $P_{tu} = x_1 d_n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_3 - T_2) = -2,605 \text{ kW}$.

La puissance à fournir à S est alors: $P_u = P_{cu} + P_{tu} = -1,753 \text{ kW} < 0$: le système fonctionne sans apport extérieur ?

B. Mécanique : étude d'un horizon artificiel

B.I. Verticale apparente dans un avion en virage

B.I.1) Dans R_a , l'avion est soumis aux forces: R_a (aérodynamiques), T (exercé par le moteur), $M g$ (poids) et la

force d'inertie d'entraînement $M \frac{V^2}{R} \mathbf{u}$.

B.I.2) Dans ce référentiel, l'avion est immobile: $\mathbf{0} = \mathbf{R}_a + \mathbf{T} + M \mathbf{g} + M \frac{V^2}{R} \mathbf{u}$.

B.I.3) La projection sur Cy_a donne: $g \sin \theta = \frac{V^2}{R} \cos \theta$.

B.I.4)a) $F_{ie} = m \frac{V^2}{R} \mathbf{u}$.

b) Le poids apparent est la somme du poids et de la force d'inertie d'entraînement: $\mathbf{P}_a = m \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ie}$. La

composante perpendiculaire à Cz_a vaut (selon Cy_a): $P_{ay} = m g \sin \theta - m \frac{V^2}{R} \cos \theta = 0$. Donc $\mathbf{P}_a$ est colinéaire à Cz_a qui est la direction sol-plafond. Donc le pilote ressent toujours un poids apparent dirigé vers le sol qu'il considère être le "bas": il ne ressent pas les changements de direction.

c) La composante selon Cz_a est $P_{az} = m g \cos \theta + m \frac{V^2}{R} \sin \theta$, avec $\frac{V^2}{R} = g \tan \theta$, donc: $P_{az} = m g \frac{1}{\cos \theta}$.

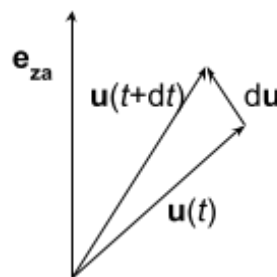
Donc: $\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{\cos \theta} - 1 = 0,15 = 15 \%$. S'il y a des turbulences donnant des accélérations aléatoires de l'ordre de 20 % de g , le pilote ne ressent pas les variations de P_a .

B.II. Approximation gyroscopique

B.II.1) I s'exprime en kg.m^2 .

B.II.2)a) $L = I \Omega$.

b) $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$ et $\mathbf{L} = L \mathbf{u}$, donc: $\frac{dL}{dt} \mathbf{u} + L \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{M}$ et $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\mathbf{M}}{L} - \frac{dL}{dt} \frac{\mathbf{u}}{L}$.



B.III. Système érecteur

B.III.1)a) $L d\mathbf{u} = \mathbf{M} dt$ et d'après le schéma ci-contre $\mathbf{M}$ doit être perpendiculaire à $\mathbf{u}$ et à $\mathbf{u} \wedge \mathbf{e}_{za}$.

b) Le vecteur proposé est bien perpendiculaire à $\mathbf{u}$ ($\mathbf{M} \cdot \mathbf{u} = 0$), et à $\mathbf{u} \wedge \mathbf{e}_{za}$ ($\mathbf{M} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{e}_{za}) = 0$),.

τ s'exprime en secondes.

B.III.2)a) La projection selon $\mathbf{e}_{za}$ donne: $\tau \frac{d}{dt} (\cos \beta) = 1 - \cos^2 \beta$ ou $\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{\tau} \sin \beta$.

B.III.2)b) Cette équation s'écrit: $\frac{d \cos \beta}{1 - \cos^2 \beta} = \frac{dt}{\tau}$, on pose $v = \cos \beta$, donc: $\frac{dv}{1 - v^2} = \frac{dt}{2\tau} \left(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{1+v} \right)$.

qui s'intègre en $\frac{t}{\tau} + cste = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} = -\ln \tan(\beta/2)$, d'où: $\tan(\beta/2) = \tan(\beta_0/2) \exp(-t/\tau)$.

Rq: pour avoir un "bon" système, il faut τ "petit".

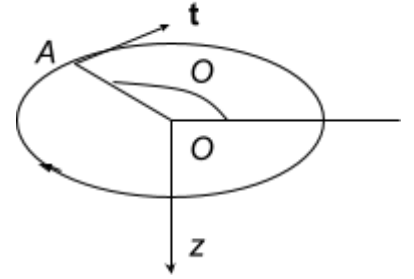
B.IV. Comportement de l'horizon artificiel en virage

B.IV.1) $\mathbf{v}(A) = -\dot{\phi} R \mathbf{t} = -\dot{\phi} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{OA}$, donc $\boldsymbol{\Omega}_a = -\dot{\phi} \mathbf{e}_z$.

$\Omega_a = -d\phi/dt$ (0,5 tr/min), $\tau=360$ s, d'où: $\Omega_a \tau = 18,85 \text{ rad} = 6\pi^\circ$.

B.IV.2) R_{CM} est en translation par rapport à R , donc:
 $\boldsymbol{\Omega}_{Ra/RCM} = \boldsymbol{\Omega}_{Ra/R} + \boldsymbol{\Omega}_{R/RCM} = \boldsymbol{\Omega}_a + \mathbf{0} = \boldsymbol{\Omega}_a$.

B.IV.3) $\frac{d\mathbf{u}}{dt}_{R_a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}_{R_{CM}} + \boldsymbol{\Omega}_{R_{CM}/R_a} \wedge \mathbf{u} = \frac{\mathbf{M}}{L} - \boldsymbol{\Omega}_a \wedge \mathbf{u}$.



B.IV.4)a) Si $\mathbf{u}$ est fixe dans R_a , $\mathbf{M} = L \boldsymbol{\Omega}_a \wedge \mathbf{u} = L \Omega_a \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{u}$ et $\mathbf{M} = \frac{L}{\tau} [\mathbf{e}_{za} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{za}) \mathbf{u}]$.

Or $\mathbf{e}_z = \cos\theta \mathbf{e}_{za} + \sin\theta \mathbf{e}_{ya}$, et

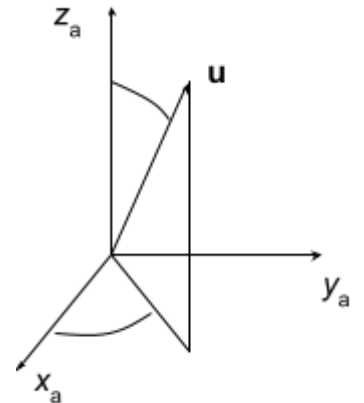
$\mathbf{u} = \cos\beta \mathbf{e}_{za} + \sin\beta (\cos\alpha \mathbf{e}_{xa} + \sin\alpha \mathbf{e}_{ya})$.

Donc:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt}_{R_a} &= \frac{d}{dt} [\cos\beta \cos\alpha \mathbf{e}_{xa} + \cos\beta \sin\alpha \mathbf{e}_{ya} + \sin\beta \cos\alpha \mathbf{e}_{za} + \sin\beta \sin\alpha \mathbf{e}_{ya}] \\ &= \Omega_a \tau \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\beta - \cos\theta \sin\beta \sin\alpha \\ \cos\theta \sin\beta \cos\alpha - \sin\theta \sin\beta \cos\alpha \\ \sin\theta \cos\beta + \cos\theta \sin\beta \sin\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Selon $\mathbf{e}_{ya}$: $-\cos\beta \sin\alpha = \Omega_a \tau \cos\theta \cos\alpha$ (1).

Selon $\mathbf{e}_{za}$: $\sin\beta = -\Omega_a \tau \sin\theta \cos\alpha$ (2).



b) (2) donne: $\cos\alpha = -\frac{\sin\beta}{\Omega_a \tau \sin\theta}$, en reportant dans (1): $\sin\alpha = \frac{\sin\beta \cos\theta}{\cos\beta \sin\theta} = \frac{\tan\beta}{\tan\theta}$.

c) $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \dots = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta} \frac{1}{\Omega_a^2 \tau^2} + \frac{1 - \sin^2\theta}{1 - \sin^2\beta}$.

d) $\Omega_a^2 \tau^2 \gg 1$, donc: $1 \approx \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta} \frac{1 - \sin^2\theta}{1 - \sin^2\beta}$, ce qui donne $\sin^2\beta \approx \sin^2\theta$, donc $\sin\theta \approx \sin\beta$ car β et θ sont du même signe.

e) $\mathbf{u} - \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} \sin\beta \cos\alpha \\ \sin\beta \sin\alpha \\ \cos\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\beta \cos\alpha \\ \sin\beta \sin\alpha - \sin\theta \\ \cos\beta - \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\beta \cos\alpha \\ \sin\theta (\sin\alpha - 1) \\ 0 \end{pmatrix}$.

De plus $\sin\alpha = \frac{\tan\beta}{\tan\theta} \approx 1$, donc: $\mathbf{u} - \mathbf{e}_z \approx \begin{pmatrix} \sin\beta \cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = K \mathbf{e}_{xa}$.

Le carré de la norme donne: $K^2 = 2 - 2 \cos(\mathbf{u}, \mathbf{e}_z)$. On note γ l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{e}_z$.

Or $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{e}_z) = K \mathbf{e}_{xa} \cdot \mathbf{u} = K \sin\beta \cos\alpha$, donc: $1 - \cos\gamma = K \sin\beta \cos\alpha$.

On élève au carré,...: $1 - \cos\gamma \approx 2 \sin^2\theta \cos^2\alpha$, avec $\cos^2\alpha \approx \frac{1}{\Omega_a^2 \tau^2}$.

AN: $1 - \cos\gamma \approx 1,41.10^{-3}$, d'où $\gamma \approx 3^\circ$.

Si le pilote est sensible à une déviation de 1° , il ressentira cet écart.