Gaston Barau

I. Donner et démontrer la formule de la somme des carrés des premiers entiers par récurrence.

II. Calculer

$$S = \sum_{1 \le i \le j \le n} ij$$

III. Soit $n \in N^*$.

1. Montrer que

$$\forall k \in [\![1; n+1]\!], \frac{1}{k}(n\ k-1) = \frac{1}{n+1}(n+1\ k)$$

2. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(n\ k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Thomas Bernardo

I. Résoudre dans R^3 le système d'équations suivant en explicitant la méthode

$$\{9x - 5y - 6z = 4\ x + 5y + 4z = 3\ 5x - 10y + 2z = -3$$

II. Démontrer que, pour tout entier $n \in N^*$ et pour toute famille de n réels strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \ge n^2$$

III. Montrer que

$$\forall (n, p, q) \in N^3,\ \sum_{k=0}^{n} (p\ k)(q\ n-k) = (p+q\ n)$$

En déduire

$$\forall n \in N,\ \sum_{k=0}^{n} (n\ k)^2 = (2n\ n)$$

Noam Bieluk

I. Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.

II. Soit $n \in N$, calculer

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} (n\ j)(j\ i)$$

III. Soient $n \in N^*$ et une famille de n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = n \ et \ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$$

Démontrer que

$$\forall k \in [\![1; n]\!], x_k = 1$$

Gaston Barau

I. Donner et démontrer la formule de la somme des carrés des premiers entiers par récurrence.

II. Calculer

$$S = \sum_{1\le i\le j\le n} ij$$

$$2S = 2\sum_{1\le i\le j\le n} ij = \sum_{1\le i,j\le n} ij + \sum_{1\le i\le n} i^2 2S = \left(\sum_{1\le i\le n} i\right)\left(\sum_{1\le j\le n} j\right) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} 2S = ($$

Factorisons l'expression $3n^2 + 7n + 2$ en remarquant que -2 est une racine évidente. On déduit que la deuxième racine λ vérifie l'équation

$$-6\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

Remarque

On rappelle que si λ_1 et λ_2 sont les racines complexes de l'expression

$$ax^2 + bx + c$$

où a, b, c sont des réels, alors

$$ax^2 + bx + c = a(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

Ainsi, par identification des coefficients du polynôme,

$$a\lambda_1\lambda_2 = c$$

Donc

$$2S = \frac{1}{12} n(n+1)\times 3(n+2)\left(n + \frac{1}{3}\right)$$

Et donc

$$S = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

III. Soit $n \in N^*$.

1. Montrer que

$$\forall k \in [\![1; n+1]\!], \frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}$$

Soient $n \in N^*$ et $k \in [\![1; n+1]\!]$,

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{k!(n+1-k)!} = \frac{1}{k} \times \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = \frac{1}{k}\binom{n}{k -$$

2. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrons par récurrence la proposition $P(n)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Initialisation

$P(1)$ est trivialement vraie

Hérédité

Supposons que $P(n)$ soit vraie et montrons $P(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

D'après la formule de Pascal,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Or, $\binom{n}{n+1} = 0$ donc, d'après la question précédente,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}$$

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = (-1+1)^{n+1} = 0$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion

La proposition est vraie au rang 1 et héréditaire à partir de ce rang donc elle est vraie pour tout $n \in N^*$

$$\forall n \in N^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Thomas Bernardo

I. Résoudre dans R^3 le système d'équations suivant en explicitant la méthode

$$\{9x - 5y - 6z = 4\ x + 5y + 4z = 3\ 5x - 10y + 2z =- 3$$

$(S)\{9x - 5y - 6z = 4\ (L_1)\ x + 5y + 4z = 3\ (L_2)\ 5x - 10y + 2z =- 3\ \ (L_3)$

On choisit (L_2) comme pivot.

$(S)\Leftrightarrow\{x + 5y + 4z = 3\ (L_2)\ 50y + 42z = 23\ (9L_2 - L_1)\ 35y + 18z = 18\ \ (5L_2 -$

$(S)\Leftrightarrow\{x + 5y + 4z = 3\ \left(L_1\right)\ 95y = 57\ \left(7L_3 - 3L_2\right)\ 114z =- 19\ \left(7L_2 - 10L_3\right)$

$$(S)\Leftrightarrow\{x = 3 - 5y - 4z = \frac{2}{3}\ y = \frac{3}{5}\ z =- \frac{1}{6}$$

$$S = \left\{\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{5}; - \frac{1}{6}\right)\right\}$$

II. Démontrer que, pour tout entier $n \in N^*$ et pour toute famille de n réels strictement positifs $x_1, x_2, ..., x_n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$$

Soient $n\in N^*$ et $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in {R_+^*}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{x_i}{x_j}$$

$$= \sum_{1\le i=j\le n} \frac{x_i}{x_j} + \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right) = n + \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right)$$

La deuxième somme comporte $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ termes et

$$\forall x, y\in R_+^*, \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy} - 2 + 2 = \frac{x^2+y^2-2xy}{xy} + 2 = 2 + \frac{(x-y)^2}{xy} \ge 2$$

Donc

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \ge n + 2\times\frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

III. Montrer que

$$\forall (n, p, q) \in N^3,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

Soit $(n, p, q) \in N^3$

Considérons d'abord le cas $n > p + q$

$$\binom{p+q}{n} = 0$$

Or, par hypothèse

$$k\le p \Longrightarrow n - k \ge n - p > q$$

Et

$$n - k \le q \Longrightarrow k \ge n - q > p$$

Donc la somme de gauche est nécessairement nulle.

Supposons maintenant que $n\le p + q$

Soit $x\in R$,

$$(x + 1)^p (x + 1)^q = (x + 1)^{p+q}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} x^j\right) = \sum_{j=0}^{p+q} \binom{p+q}{m} x^m$$

$$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{p+q} \sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} x^r = \sum_{j=0}^{p+q} \binom{p+q}{m} x^m$$

En identifiant le coefficient du monôme de degré n dans les membres de droite et de gauche (cad pour $r = m = n$), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

En déduire

$$\forall n\in N,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Posons $n = p = q$ dans la formule précédente, d'après la formule de symétrie,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Noam Bieluk

I. Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.

Soient $a, b\in R$ et $n\in N$ tels que si $n = 0$ alors $a\neq 0, b\neq 0, a + b\neq 0$

Montrons par récurrence la proposition $P(n)$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Initialisation

$$(a + b)^0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

$P(0)$ est donc vraie.

Hérédité

Supposons que $P(n)$ soit vraie et montrons $P(n + 1)$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

D'après la formule de Pascal,

$$(a + b)^{n+1} = (a + b) \times (a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum$$

Posons $j = k + 1 \Leftrightarrow k = j - 1$ dans la première somme.

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-(j-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

En remarquant que $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$ et en posant $k = j$ dans la première somme,

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

En sommant terme à terme, on obtient alors, d'après la formule de Pascal,

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie

Conclusion
La proposition est vraie au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang donc elle est vraie pour tout $n \in N$

$$\forall n \in N,\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} (n\ k\ ) a^k b^{n-k}$$

II. Soit $n \in N$, calculer

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} (n\ j\ )(j\ i\ )$$

Soient $n, i, j \in N$ tels que $i \leq j \leq n$,

$$(n\ j\ )(j\ i\ ) = \frac{n!}{j!(n-j)!} \times \frac{j!}{i!(j-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{(n-i)!}{(n-j)!(j-i)!} = (n\ i\ )(n-i\ j-i\ )$$

Donc

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} (n\ j\ )(j\ i\ ) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} (n\ i\ )(n-i\ j-i\ ) = \sum_{i=0}^{n} (n\ i\ ) \sum_{j=i}^{n} (n-i\ j-i\ )$$

Posons $k = j - i \Leftrightarrow j = k + i$ dans la somme de droite. On déduit que, d'après la formule du binôme de Newton,

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} (n\ i\ ) \sum_{k=0}^{n-i} (n-i\ k\ ) = \sum_{i=0}^{n} (n\ i\ ) 2^{n-i} = 3^n$$

III. Soient $n \in N^*$ et une famille de n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = n \ et\ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$$

Démontrer que

$$\forall k \in [\![1; n]\!], x_k = 1$$

Soient $n \in N^*$ et une famille de n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = n \ et\ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$$

Remarquons que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - 1\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2x_k + 1 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n - 2n + n \sum_{k=1}^{n} ($$

Les termes positifs d'une somme nulle sont nécessairement nuls donc

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \left(x_k - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_k = 1$$