

## Метод математической индукции

Способ доказательства методом математической индукции заключается в следующем:

- 1) проверяют справедливость утверждения для меньшего  $n$ ;
- 2) допускают справедливость утверждения для некоторого натурального  $n = k$ ;
- 3) доказывают справедливость утверждения для  $n = k + 1$ .

### Задачи на делимость

**Задача 1.** Доказать, что при любом натуральном  $n$  число  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  делится на 7.

#### Решение.

- 1) При  $n = 1$   $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35$  делится на 7.
- 2) Предположим, что при  $n = k$  выражение  $a_k = 3^{2k+1} + 2^{k+2}$  делится на 7.
- 3) Докажем, что при  $n = k + 1$  выражение  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  делится на 7.

$$\begin{aligned} 3^{2n+1} + 2^{n+2} &= 3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2} = 3^{2k+2+1} + 2^{k+2+1} = 3^{2k+1+2} + 2^{k+2+1} = \\ &= 3^{2k+1} \cdot 3^2 + 2^{k+2} \cdot 2^1 = 3^{2k+1} \cdot 9 + 2^{k+2} \cdot 2 = 3^{2k+1} \cdot 9 + 2^{k+2} \cdot 9 - 2^{k+2} \cdot 7 = \\ &= (3^{2k+1} + 2^{k+2}) \cdot 9 - 2^{k+2} \cdot 7 = a_k \cdot 9 - 2^{k+2} \cdot 7 = 9a_k - 7 \cdot 2^{k+2}. \end{aligned}$$

$9a_k$  делится на 7, т. к. по предположению  $a_k$  делится на 7,  $7 \cdot 2^{k+2}$  делится на 7. Значит, при любом натуральном  $n$  число  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  делится на 7.

**Задача 2.** Доказать, что для любого натурального  $n$  число  $7^n - 1$  делится на 6.

#### Решение.

- 1) При  $n = 1$   $7^n - 1 = 7^1 - 1 = 6$  делится на 6.
- 2) Предположим, что при  $n = k$  выражение  $7^k - 1$  делится на 6.
- 3) Докажем, что при  $n = k + 1$  выражение  $7^n - 1$  делится на 6.

$$\begin{aligned} 7^n - 1 &= 7^{k+1} - 1 = 7^k \cdot 7 - 1 = 7 \cdot 7^k - 1 = (6 + 1) \cdot 7^k - 1 = 6 \cdot 7^k + 7^k - 1 = \\ &= 6 \cdot 7^k + (7^k - 1). \end{aligned}$$

$6 \cdot 7^k$  делится на 6,  $7^k - 1$  делится на 6 по предположению. Значит, для любого натурального  $n$  число  $7^n - 1$  делится на 6.

**Задача 3.** Доказать, что для любого натурального  $n$  число  $4^n + 15n - 1$  делится на 9.

#### Решение.

- 1) При  $n = 1$   $4^n + 15n - 1 = 18$  делится на 9.
- 2) Предположим, что при  $n = k$  выражение  $4^k + 15k - 1$  делится на 9.
- 3) Докажем, что при  $n = k + 1$  выражение  $4^n + 15n - 1$  делится на 9.

$$4^n + 15n - 1 = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 = \\ = 3 \cdot 4^k + 4^k + 15k + 15 - 1 = (4^k + 15k - 1) + (3 \cdot 4^k + 15).$$

$4^k + 15k - 1$  делится на 9 по предположению.

Докажем, что  $3 \cdot 4^k + 15$  делится на 9.

$3 \cdot 4^k + 15 = 3(4^k + 5)$  будет делиться на 9 только, если  $(4^k + 5)$  будет делиться на 3.

Докажем, что при любом натуральном  $k$  число  $4^k + 5$  делится на 3 (утверждение A).

A1) При  $k = 1$  выражение  $4^k + 5 = 9$  делится на 3.

A2) Предположим, что при  $k = m$  выражение  $4^m + 5$  делится на 3.

A3) Докажем, что при  $k = m + 1$  выражение  $4^k + 5$  делится на 3.

$$4^k + 5 = 4^{m+1} + 5 = 4 \cdot 4^m + 5 = 4^m + 3 \cdot 4^m + 5 = (4^m + 5) + 3 \cdot 4^m.$$

$4^m + 5$  делится на 3 по предположению,  $3 \cdot 4^m$  делится на 3. Значит, при любом натуральном  $k$  число  $4^k + 5$  делится на 3.

Значит, для любого натурального  $n$  число  $4^n + 15n - 1$  делится на 9.

**Задача 4.** Доказать, что для любого натурального  $n$  число  $n^3 + 11n$  делится на 6.

*Решение.*

1) При  $n = 1$  имеем:  $n^3 + 11n = 1 + 11 = 12$  делится на 6.

2) Предположим, что при  $n = k$  число  $k^3 + 11k$  делится на 6.

3) Докажем, что при  $n = k + 1$  число  $n^3 + 11n$  делится на 6.

$$n^3 + 11n = (k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = \\ = (k^3 + 11k) + 3k^2 + 3k + 12 = (k^3 + 11k) + 3k(k+1) + 12.$$

$k^3 + 11k$  делится на 6 по предположению, 12 делится на 6,  $3k(k+1)$  делится на 6, т. к. 3 делится на 3,  $k(k+1)$  делится на 2. Т. к. каждое слагаемое делится на 6, то и вся сумма делится на 6. Значит, для любого натурального  $n$  число  $n^3 + 11n$  делится на 6.

**Задача 5.** Доказать, что для любого натурального  $n$  число

$$6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1} \text{ делится на } 11.$$

*Решение.*

1) При  $n = 1$  имеем:  $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1} = 6^0 + 3^2 + 3^0 = 1 + 9 + 1 = 11$  делится на 11.

2) Предположим, что при  $n = k$  число  $6^{2k-2} + 3^{k+1} + 3^{k-1}$  делится на 11.

3) Докажем, что при  $n = k + 1$  число  $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$  делится на 11.

$$6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1} = 6^{2(k+1)-2} + 3^{k+1+1} + 3^{k+1-1} = 6^{2k-2+2} + 3^{k+1+1} + 3^{k-1+1} =$$

$= 6^2 \cdot 6^{2\kappa-2} + 3 \cdot 3^{\kappa+1} + 3 \cdot 3^{\kappa-1} = 36 \cdot 6^{2\kappa-2} + 3 \cdot 3^{\kappa+1} + 3 \cdot 3^{\kappa-1} =$   
 $3 \cdot 6^{2\kappa-2} + 3 \cdot 3^{\kappa+1} + 3 \cdot 3^{\kappa-1} + 33 \cdot 6^{2\kappa-2} = 3(6^{2\kappa-2} + 3^{\kappa+1} + 3^{\kappa-1}) + 33 \cdot 6^{2\kappa-2}.$   
 $6^{2\kappa-2} + 3^{\kappa+1} + 3^{\kappa-1}$  делится на 11 по предположению,  $33 \cdot 6^{2\kappa-2}$  делится на 11.  
 Значит, для любого натурального  $n$  число  $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$  делится на 11.

### *Задачи на доказательства равенства*

**Задача 1.** Доказать, что для всех натуральных  $n$  справедливо равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

*Решение.*

1) При  $n = 1$  имеем:  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = 1^3 = 1$ ,  $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ . Значит, при  $n = 1$  равенство верно.

2) Предположим, что равенство верно и при  $n = \kappa$ , т. е. верно равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + \kappa^3 = \frac{\kappa^2(\kappa+1)^2}{4}.$$

3) Докажем, что это равенство верно и при  $n = \kappa + 1$ .

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + \kappa^3 + (\kappa+1)^3 = \frac{(\kappa+1)^2(\kappa+2)^2}{4}.$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + \kappa^3 + (\kappa+1)^3 = \frac{(\kappa+1)^2(\kappa+2)^2}{4},$$

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + \kappa^3) + (\kappa+1)^3 = \frac{(\kappa+1)^2(\kappa+2)^2}{4}. \quad \text{Т. к.} \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + \kappa^3 = \frac{\kappa^2(\kappa+1)^2}{4}, \quad \text{то}$$

имеем:

$$\begin{aligned}
 (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + \kappa^3) + (\kappa+1)^3 &= \frac{\kappa^2(\kappa+1)^2}{4} + (\kappa+1)^3 = \frac{\kappa^2(\kappa+1)^2 + 4(\kappa+1)^3}{4} = \frac{(\kappa+1)^2(\kappa^2 + 4\kappa + 4)}{4} = \\
 &= \frac{(\kappa+1)^2(\kappa+2)^2}{4}.
 \end{aligned}$$

**Задача 2.** Доказать, что для всех натуральных  $n$  справедливо равенство

$$p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+n) = \frac{(2p+n)(n+1)}{2}$$

*Решение.*

3) При  $n = 1$  имеем:  $p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+n) = p + (p+1) = 2p+1$ ,

$$\frac{(2p+n)(n+1)}{2} = \frac{(2p+1)(1+1)}{2} = \frac{(2p+1)2}{2} = 2p+1.$$

2) Предположим, что равенство верно и при  $n = \kappa$ , т. е.

$$p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+\kappa) = \frac{(2p+\kappa)(\kappa+1)}{2}.$$

3) Докажем, что равенство верно и при  $n = \kappa + 1$ .

$$p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+n) = \frac{(2p+n)(n+1)}{2} =$$

$$= p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+\kappa) + (p+\kappa+1) = \frac{(2p+\kappa+1)(\kappa+1+1)}{2} = \frac{(2p+\kappa+1)(\kappa+2)}{2}.$$

$$p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+\kappa) + (p+\kappa+1) = \frac{(2p+\kappa)(\kappa+1)}{2} + (p+\kappa+1) = \frac{(2p+\kappa)(\kappa+1) + (2p+2\kappa+2)}{2} =$$

$$= \frac{2\kappa p + 2p + \kappa^2 + \kappa + 2p + 2\kappa + 2}{2} = \frac{2\kappa p + \kappa^2 + 4p + 2\kappa + \kappa + 2}{2} = \frac{(2\kappa p + \kappa) + (4p + 2) + (\kappa^2 + 2\kappa)}{2} =$$

$$= \frac{\kappa(2p+1) + 2(2p+1) + \kappa(\kappa+2)}{2} = \frac{(2p+1)(\kappa+2) + \kappa(\kappa+2)}{2} = \frac{(\kappa+2)(2p+1+\kappa)}{2} = \frac{(2p+\kappa+1)(\kappa+2)}{2}.$$

### *Задачи на доказательство неравенств*

*Задача 1.* Доказать неравенство  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad (n > 1)$

*Решение.*

1) При  $n = 2$  имеем:  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}.$

2) Предположим, что неравенство верно и при  $n = \kappa$  ( $\kappa > 2$ ), т. е.

$$\frac{1}{\kappa+1} + \frac{1}{\kappa+2} + \dots + \frac{1}{2\kappa} > \frac{13}{24}.$$

3) Докажем, что неравенство верно и при  $n = \kappa + 1$ .

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad \frac{1}{\kappa+1+1} + \frac{1}{\kappa+1+2} + \dots + \frac{1}{2(\kappa+1)} > \frac{13}{24},$$

$$\frac{1}{\kappa+2} + \frac{1}{\kappa+3} + \dots + \frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{2\kappa+1} + \frac{1}{2(\kappa+1)} > \frac{13}{24}.$$

Оценим левую часть неравенства, учитывая, что  $\frac{1}{\kappa+1} + \frac{1}{\kappa+2} + \dots + \frac{1}{2\kappa} > \frac{13}{24}.$

$$\frac{1}{\kappa+2} + \frac{1}{\kappa+3} + \dots + \frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{2\kappa+1} + \frac{1}{2(\kappa+1)} = \left( \frac{1}{\kappa+1} + \frac{1}{\kappa+2} + \frac{1}{\kappa+3} + \dots + \frac{1}{2\kappa} \right) + \left( \frac{1}{2\kappa+1} + \frac{1}{2(\kappa+1)} - \frac{1}{\kappa+1} \right).$$

$$\frac{1}{2\kappa+1} + \frac{1}{2(\kappa+1)} - \frac{1}{\kappa+1} = \frac{1}{2\kappa+1} + \frac{1-2}{2(\kappa+1)} = \frac{1}{2\kappa+1} - \frac{1}{2\kappa+2} = \frac{2\kappa+2-(2\kappa+1)}{(2\kappa+1)(2\kappa+2)} = \frac{1}{(2\kappa+1)(2\kappa+2)} > 0,$$

Т. к.  $\frac{1}{\kappa+1} + \frac{1}{\kappa+2} + \dots + \frac{1}{2\kappa} > \frac{13}{24},$   $\frac{1}{2\kappa+1} + \frac{1}{2(\kappa+1)} - \frac{1}{\kappa+1} > 0,$  то

$$\frac{1}{\kappa+2} + \frac{1}{\kappa+3} + \dots + \frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{2\kappa+1} + \frac{1}{2(\kappa+1)} > \frac{13}{24}.$$

**Задача 2.** Доказать, что при любом натуральном  $n \geq 5$  справедливо неравенство  $2^n \geq n^2 + n + 2$ .

*Решение.*

1) При  $n = 5$  имеем:  $2^5 = 32, 5^2 + 5 + 2 = 32$ .

2) Предположим, что неравенство верно и при  $n = \kappa \geq 5$ , т. е. верно неравенство  $2^\kappa \geq \kappa^2 + \kappa + 2, 2^\kappa - \kappa^2 - \kappa - 2 \geq 0$ .

3) Докажем, что неравенство верно и при  $n = \kappa + 1$ .

$$2^{\kappa+1} \geq (\kappa+1)^2 + \kappa + 1 + 2, 2^{\kappa+1} \geq (\kappa+1)^2 + \kappa + 3, 2^{\kappa+1} \geq \kappa^2 + 2\kappa + 1 + \kappa + 3,$$

$$2^{\kappa+1} - \kappa^2 - 2\kappa - 1 - \kappa - 3 \geq 0, 2 \cdot 2^\kappa - \kappa^2 - 2\kappa - 1 - \kappa - 3 \geq 0,$$

$$2^\kappa + 2^\kappa - \kappa^2 - 2\kappa - 1 - \kappa - 3 \geq 0, 2^\kappa + 2^\kappa - \kappa^2 - 2\kappa - 2 - \kappa - 2 \geq 0,$$

$$(2^\kappa - \kappa^2 - \kappa - 2) + 2^\kappa - 2\kappa - 2 \geq 0.$$

$$2^\kappa - \kappa^2 - \kappa - 2 \geq 0 \text{ по предположению.}$$

Докажем, что  $2^\kappa - 2\kappa - 2 \geq 0$  при  $\kappa \geq 5$ .

1) При  $\kappa = 5$  имеем  $25 - 2 \cdot 5 - 2 \geq 0$ .

2) Предположим, что неравенство верно и при  $\kappa = m \geq 5$ , т. е. верно неравенство  $2^m - 2m - 2 \geq 0$ .

3) Докажем, что неравенство верно и при  $\kappa = m + 1$ .

$$2^{\kappa} - 2\kappa - 2 \geq 0, \quad 2^{\kappa} \geq 2\kappa + 2, \quad 2^{m+1} \geq 2(m+1) + 2, \quad 2^{m+1} \geq 2m + 4,$$

$$2^{m+1} - 2m - 4 \geq 0, \quad 2 \cdot 2^m - 2m - 2 - 2 \geq 0, \quad 2^m + 2^m - 2m - 2 - 2 \geq 0,$$

$$(2^m - 2m - 2) + 2^m - 2 \geq 0.$$

$$2^m - 2m - 2 \geq 0 \text{ по предположению, } 2^m - 2 \geq 0, \text{ т. к. } m \geq 5.$$

*Задачи не чётность, нечётность*

*Задача 1.* Доказать, что при любом натуральном  $n$  число  $n^2 - n$  чётное.

*Решение.*

- 1) При  $n = 1$  имеем  $n^2 - n = 0$  чётное.
- 2) Предположим, что при  $n = \kappa$  число  $\kappa^2 - \kappa$  чётное.
- 3) Докажем, что при  $n = \kappa + 1$  число  $n^2 - n$  чётное.

$$n^2 - n = (\kappa + 1)^2 - (\kappa + 1) = \kappa^2 + 2\kappa + 1 - \kappa - 1 = \kappa^2 + \kappa = \kappa^2 - \kappa + 2\kappa.$$

Число  $\kappa^2 - \kappa$  чётное по предположению, число  $2\kappa$  чётное.

Значит, при любом натуральном  $n$  число  $n^2 - n$  чётное.

*Задачи на нахождение значений выражения*

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)},$$

*Задача 1.* Найти сумму  $n \geq 1$ .

*Решение.*

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}, \quad S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Каждая из рассматриваемых сумм равна дроби, в числителе которой стоит число слагаемых, а в знаменателе - число, на единицу больше, чем число слагаемых.  $S_n = \frac{n}{n+1}$ .

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

1) При  $n = 1$  имеем:  $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{2}.$

2) Предположим, что при  $n = k$  верно равенство, т. е.  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$

3) Докажем, что равенство верно и при  $n = k + 1$ .

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+1+1},$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}, \quad \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} \right) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2},$$

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}, \quad \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}, \quad \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}, \quad \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2},$$

$$\frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{k+2}.$$

### *Задачи для самостоятельного решения*

**Задача 1.** Доказать, что при каждом натуральном  $n$  число  $-n^3 - 17n + 12$  делится на 6.

**Задача 2.** Доказать, что при каждом натуральном  $n$  число  $2n^3 + 3n^2 + 7n$  делится на 6.

*Задача 3.* Доказать, что при каждом натуральном  $n$  число  $5^n - 4n + 15$  делится на 16.

*Задача 4.* Доказать, что при каждом натуральном  $n \geq 1$  число  $4^{2^n - 1} + 1$  делится на 5.

*Задача 5.* Доказать, что сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

*Задача 6.* Доказать, что при всех натуральных  $n$  справедливо равенство  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

*Задача 7.* Доказать, что при всех натуральных  $n$  справедливо равенство  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$ .

*Задача 8.* Доказать, что при всех натуральных  $n$  справедливо равенство  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

*Задача 9.* Доказать, что при всех натуральных  $n$  справедливо равенство  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ .

*Задача 10.* Доказать, что при всех натуральных  $n$  справедливо равенство  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{n^3}$ .

*Задача 11.* Доказать, что при всех натуральных  $n$  справедливо равенство  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ .

*Задача 12.* Доказать, что при любом натуральном  $n$  справедливо неравенство  $5^n > 7n - 3$ .

*Задача 13.* Доказать, что при любом натуральном  $n \geq 7$  справедливо неравенство  $2^{n-1} > n(n+1)$ .

*Задача 14.* Доказать, что при любом натуральном  $n$  справедливо неравенство  $3^n \geq 2^n + n$ .

*Задача 15.* Доказать, что при любом натуральном  $n$  справедливо неравенство  $4^n \geq 3^n + n^2$ .

*Задача 16.* Доказать, что при любом натуральном  $n \geq 2$  справедливо неравенство  $4^n \geq 3^n + 2^n$ .

*Задача 17.* Доказать, что при любом натуральном  $n$  справедливо неравенство  $\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$ .

*Задача 18.* Для любого натурального  $n$  найти сумму  $s_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ .

*Задача 19.* Для каждого натурального  $n$  найти произведение

$$S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

[https://www.matburo.ru/ex\\_dm.php?p1=dmmmi](https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmmmi)

<http://www.math.md/school/krujok/inductr/inductr.html>

<http://www.math.mrsu.ru/text/courses/0/eluch/200.html>

[http://school10.ru/mat\\_induction.html](http://school10.ru/mat_induction.html)

<http://pmpu.ru/vf4/basics/induction>

<https://foxford.ru/wiki/matematika/metod-matematicheskoy-induktsii>

[http://elbib.nbchr.ru/lib\\_files/0/koch\\_0\\_0000166.pdf](http://elbib.nbchr.ru/lib_files/0/koch_0_0000166.pdf)