

## Composition de Physique – C – (U)

(durée : 6 heures)

## 1 Indice optique d'un milieu dilué

Q1.  $n_{\text{air}} \approx 1$  ;  $n_{\text{verre}} \approx 1.5$  et  $n_{\text{eau}} \approx 1.33$ . Un milieu dilué est défini par une distance entre particules constitutives très grande devant les dimensions de la particule elle-même pour pouvoir négliger les interactions entre particules, donc le seul candidat devrait être l'état gazeux mais la notion s'étend aussi à de nombreux états condensés (cf Q17 formule de Cauchy)

## 1.1 Polarizabilité d'un atome

Q2.  $\omega_0$  est une pulsation (la pulsation propre de l'oscillateur) en  $\text{rad.s}^{-1}$ ,  $\gamma$  est en  $\text{s}^{-1}$ .

Q3. Le premier terme représente la force élastique de liaison de l'électron à l'atome. Le second représente une force dissipative qu'on peut interpréter par le rayonnement de l'électron dans son mouvement accéléré autour du noyau. (Atome isolé = approximation du milieu dilué)

$$\text{Q4. } m\partial_t^2 \mathbf{s} + m_e \gamma \partial_t \mathbf{s} + m_e \omega_0^2 \mathbf{s} = -e \mathbf{E} - e \partial_t \mathbf{s} \wedge \mathbf{B}$$

Q5. L'échelle de variation de  $\mathbf{E}$  (et  $\mathbf{B}$ ) est par définition  $\lambda = 2\pi c/\omega \approx 0.5 \mu\text{m}$  alors que les variations de  $\|\mathbf{s}\|$  seront de l'ordre de la dimension atomique  $0.1 \text{ nm}$ , on considérera les champs uniformes localement pour les variations de  $\mathbf{s}(t)$ .

Q6. La force magnétique  $e \partial_t \mathbf{s} \wedge \mathbf{B}$  est très inférieure à la force électrique du fait du rapport  $vB_0/E_0 \approx v/c \ll 1$  pour les ondes électromagnétiques dans les milieux dilués.

Q7. En négligeant dans l'équation différentielle de la Q4, la force magnétique et en prenant

$$\text{pour } \mathbf{E} \text{ la forme du champ uniforme } \mathbf{E}(r_0, t) \text{ il vient } \underline{\mathbf{s}}(r, t) = \frac{e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\text{Q8. } \underline{\mathbf{p}}_0 = -e \mathbf{s}_0$$

## 1.2 Indice optique de l'air

Q9.  $\chi$  est la permittivité électrique du milieu, c'est un facteur sans dimension ;  $\mathbf{P} = n_{\text{at}} \mathbf{p}_0$  alors en

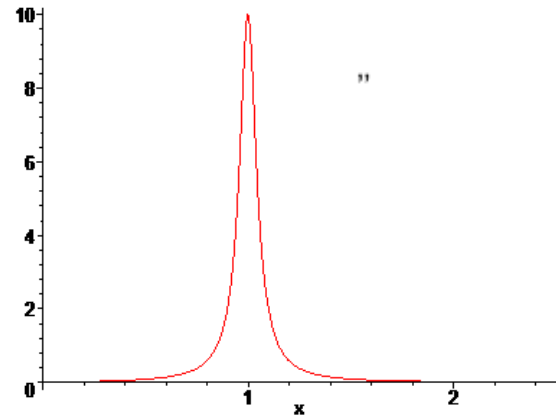
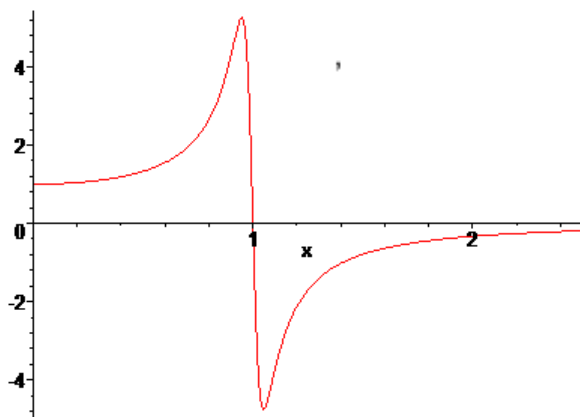
$$\text{remplaçant : } \underline{\chi}(\omega) = \frac{n_{\text{at}} e^2}{m \epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}$$

$$\text{Q10. } \text{div } \underline{\mathbf{E}} = \rho/\epsilon_0 ; \text{div } \mathbf{B} = 0 ; \text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -\partial \mathbf{B}/\partial t \text{ et } \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \epsilon_0 \partial \underline{\mathbf{E}}/\partial t)$$

$$\text{Q11. En remplaçant, technique classique : } \text{rot rot } \underline{\mathbf{E}} = -\mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi) \partial^2 \underline{\mathbf{E}}/\partial t^2.$$

$$\text{Q12. En insérant } \underline{\mathbf{E}}(r, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \text{ dans l'équation précédente : } k^2 = (\omega^2/c^2)(1 + \chi)$$

Q13. 
$$\chi' = \frac{n_{at} e^2}{m \varepsilon_0} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad \text{et} \quad \chi'' = \frac{n_{at} e^2}{m \varepsilon_0} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$



Graphes en fonction de  $x = \omega/\omega_0$  et en fixant  $\gamma =$

$0.1 * \omega_0$ .

On aura  $\chi'' \ll \chi'$  si  $\gamma \omega \ll |(\omega^2 - \omega_0^2)|$  alors  $\chi \cong \chi'$  est réel, milieu transparent.

Q14. De  $k^2 = (\omega^2/c^2)(1 + \chi')$  on tire  $v_\phi = \omega/k = c/\sqrt{1 + \chi'}$ , le milieu est dispersif puisque  $\chi'(\omega)$  donc  $v_\phi$  dépend de  $\omega$ . Par définition de l'indice  $v_\phi = c/n$  donc  $n = \sqrt{1 + \chi'}$ .

Q15. Dans la question Q3 on faisait l'hypothèse de l'atome isolé. Si  $\chi' \ll 1$ , alors  $n \cong 1 + \chi'/2$ .

Q16. En ajoutant les vecteurs polarisations volumiques dus à des électrons de force élastiques

$\omega_{0j}$  : 
$$\chi' = \sum_j \frac{n_{at} e^2}{m \varepsilon_0} \frac{1}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)}$$
, on ne tient pas compte dans un milieu transparent des  $\gamma_j$ .

Q17. Si  $\omega \ll \omega_{0j} \quad \forall j$ , alors au premier ordre non nul en  $\omega/\omega_{0j}$ , on développe l'indice  $n$  :

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{n_{at} e^2}{m \varepsilon_0} \sum_j \frac{1}{\omega_{0j}^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} + \dots \right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{n_{at} e^2}{m \varepsilon_0} \sum_j \frac{1}{\omega_{0j}^2} + \frac{1}{2} \frac{n_{at} e^2}{m \varepsilon_0} \sum_j \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^4} + \dots$$
 puis avec  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , l'expression prend la forme de la loi de Cauchy pour les milieux qui ont des fréquences d'absorption dans l'UV.

Q18.  $n - 1$  est proportionnel à  $\chi'$  donc à  $n_{at}$  et  $n_{at} = P/k_B T$  donc  $n - 1 \sim P/T$  (loi de Gladstone).

Q19.  $(n - 1)_{20} = (n - 1)_0 * (273/293) = 2.72 \cdot 10^{-4}$  et  $(n - 1)_{30} = (n - 1)_0 * (273/303) = 2.63 \cdot 10^{-4}$ .

Q20. De si faibles variations d'indice se mesurent par des procédés interférométriques type expérience des tubes de Rayleigh.

## 2 Analyse d'un mirage

Q21. Géométriquement :  $\beta = \cotan \theta$ .

Q22. Dans la zone homogène d'indice  $n_0$  la trajectoire du rayon lumineux est rectiligne (propagation rectiligne de la lumière).  $x_A = h/\beta$  et  $y_A = l$ .

Q23.  $n(y) \sin i(y) = \text{cte} = n_0 \sin \theta$ . Si on connaît la technique de décomposition en couches planes infinitésimales d'indice constant ...

Q24. Entre A et B,  $i(y)$  est croissante donc  $n(y)$  est décroissant. Ce qui implique d'après Q18 que la température  $T(y)$  est croissante. (Normal pour la diffusion thermique dans l'air surmontant le goudron surchauffé)

Q25. En B,  $i(y_B) = 90^\circ$ , donc  $n_m = n(y_B) = n_0 \sin \theta$ . Pour avoir  $y_B = 0$ , il faut que  $n_m = n_s$  on

$$\beta_l = \frac{\sqrt{1 - (n_s/n_0)^2}}{(n_s/n_0)} = \cotan \theta_l.$$

obtient donc à la limite :  $\sin \theta_l = n_s/n_0$  et

Q26. La parabole du rayon intercepte l'axe  $y = 0$  et se termine là.

Q27.  $OH_{\min} = (h + l) \tan \theta_l = (h + l)/\beta_l$ .

Q28. Avec  $n_s = n_{30} = 1.000263$  et  $n_0 = n_{20} = 1.000272$   $\beta_l = 4.24 \cdot 10^{-3}$  et  $OH_{\min} \cong 400$  m.

L'hypothèse de base est un air parfaitement immobile et notamment sans courant de convection malgré le gradient de température.

$$y'(x) = -\frac{\sqrt{1 - n_0^2 \sin^2 \theta / n(y)^2}}{n_0 \sin \theta / n(y)}$$

Q29.  $dy/dx = -\cotan i(y) = -(\cos i / \sin i)$  soit :

Q30. Avec l'expression de  $n(y)$  on élève au carré :  $y'^2 = (n_s^2/n_0^2 \sin^2 \theta - 1) + (a/n_0^2 \sin^2 \theta)y$  ce qu'on dérive pour obtenir :  $y''(x) = a/(2n_0^2 \sin^2 \theta) = \text{Cte} > 0$ , la trajectoire  $y(x)$  est donc une parabole de concavité tournée vers le haut.

Q31.  $y''(x) = a/2n_m^2 \cong a/2$  car on ne tient compte des décimales des indices  $n$  que lorsqu'il y a des différences d'indice dans les expressions.

Q32. Par intégrations successives :

$$y'(x) = \frac{1}{2} a(x - x_A) - \beta = \frac{1}{2} ax - \frac{ah}{2\beta} - \beta$$

$$y(x) = \frac{1}{4} a(x - x_A)^2 - \beta(x - x_A) + l$$

Q33.  $y'(x_B) = 0 \Rightarrow x_B = x_A + 2\beta/a = (h/\beta + 2\beta/a)$  et  $y_B = l - \beta^2/a$ .

Q34.  $y_B \geq 0 \Rightarrow \beta < \beta_l = \sqrt{al} = (n_0^2 - n_s^2)^{1/2}$ . C'est très voisin du résultat de la question Q25 si on prend  $n_s \cong 1$  au dénominateur.

Q35.  $x_C = x_B + 2\beta/a$  par symétrie de la parabole (plus facile que de résoudre  $y_C = l$  dans Q32 ...) soit  $x_C = (h/\beta + 4\beta/a)$  et  $y_C = l$ . En C on a aussi  $y'(x_C) = \beta$ . La continuité de la tangente donne l'équation de la droite du rayon incident :  $\beta = (y - y_C)/(x - x_C)$  ce qui conduit à l'expression proposée.

Q36. C'est l'équation proposée pour  $x = x_0$  et  $y = y_0$  :  $4\beta^2 - ax_0\beta - a(l - h) + ay_0 = 0$ .

Q37. Le trinôme en  $\beta$  admet un discriminant  $\Delta = a^2x_0^2 + 16a(l - h - y_0)$  et les racines,

$$\beta_{\pm} = \frac{ax_0 \pm \sqrt{\Delta}}{8}$$

lorsqu'elles existent sont . La condition d'existence est  $\Delta \geq 0$  soit :

$y_0 \leq (ax_0^2/16 + l - h)$  ; la courbe **P** est la parabole  $y = ax^2/16 + l - h$ , d'axe vertical, de concavité tournée vers le haut, de sommet I (0,  $l - h$ ) et le domaine **S** la partie sous la parabole dans le demi plan  $y > l$ .

Q38. On a vu en Q34 que le rayon ne serait pas intercepté par le sol si  $\beta$  (défini  $> 0$  par la géométrie du début) est inférieur à  $\beta_l = \sqrt{al}$ .

Q39. Pour que  $\beta_+ > 0$  il suffit que  $x_0$  soit positif ce qui est toujours vrai, pour que  $\beta_+ < \beta_l$  il faut réaliser :  $ax_0 + \sqrt{\Delta} < 8\beta_l$  ou  $\sqrt{\Delta} < 8\beta_l - ax_0$  pour une comparaison commode on élève au carré

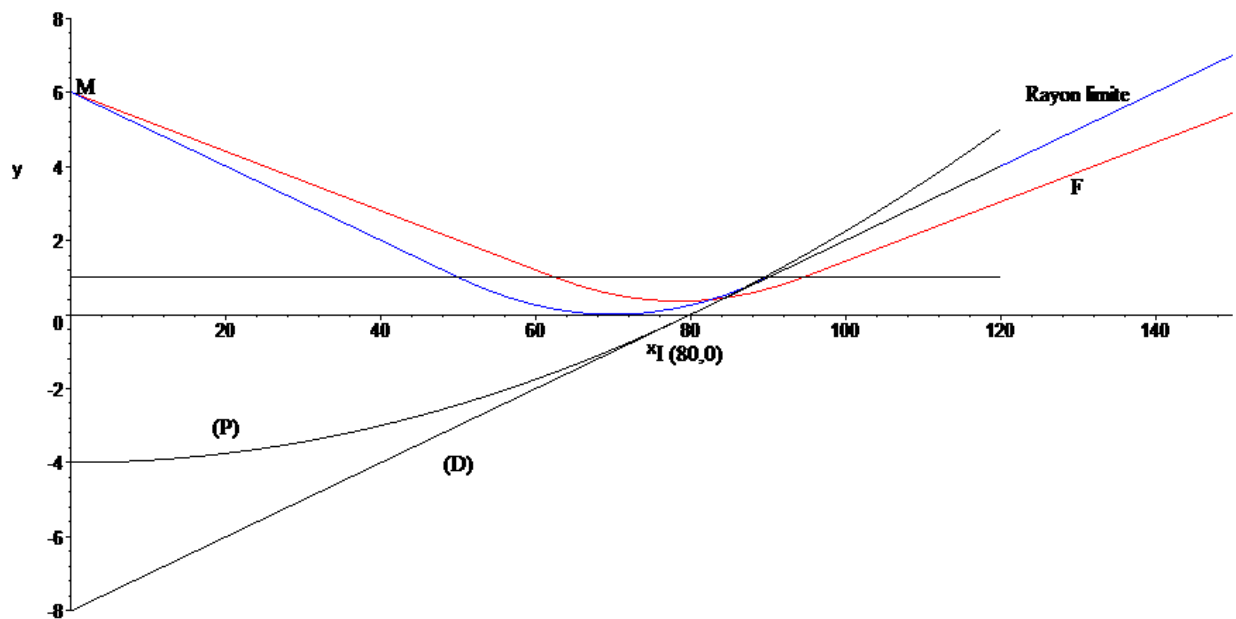
en renversant le signe de l'inégalité car les nombres en présence sont positifs et inférieurs à 1, le calcul donne  $y_0 < \beta x_0 - 3l - h$ , c'est le domaine  $S_+$  sous la droite **D** d'équation :  $y = \beta x - 3l - h$ .

Q40. Pour  $\beta_-$  la condition  $\beta_- < \beta_l$  est automatiquement vérifiée dans le domaine  $S_+$  car  $\beta_- < \beta_+$ , il reste à vérifier  $\beta_- > 0$  :  $ax_0 > \sqrt{\Delta}$  en élevant au carré on obtient  $y_0 > l - h$ , ce qui est toujours vrai car  $y_0 > l$ . La région  $S_-$  est finalement confondue avec la région  $S_+$ . Il y a donc deux rayons distincts issus de F qui arriveront en M.

Q41. Les courbes **P** et **D** ont des intersections définies par  $ax_l^2/16 + l - h = \beta x_l - 3l - h$  c'est-à-dire  $ax_l^2 - 16\beta x_l + 64l = 0$ . Le discriminant de ce trinôme est nul ce qui signale une racine double donc un point de tangence en  $x_l = 8\beta/a$  (On peut vérifier que la tangente à la parabole **P** en  $x_l$  a pour valeur :  $y' = ax_l/8 = \beta_l$ ), l'ordonnée  $y_l = 5l - h$ .

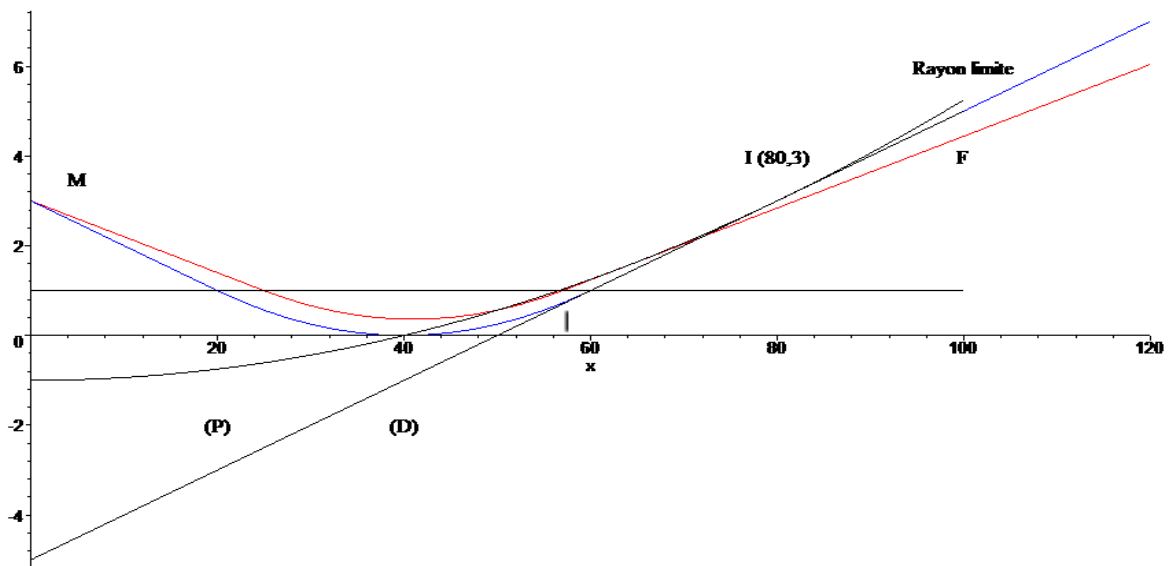
Q42. Avec  $y_l \leq l$  soit  $l \leq h/4$ .

Q43. Par exemple on prend  $l = 1, h = 5, a = 0.01$  alors  $\beta_l = 0.1$ . On peut tracer la parabole **P** et la droite **D** en noir. Le rayon limite en bleu et un rayon « quelconque » avec  $\beta = 0.08$  en rouge.



Q44. Pour deux points  $F_2$  et  $F_1$  de même abscisse  $x_0$  et d'ordonnées  $y_2 > y_1$  ( $F_2$  au dessus de  $F_1$ ) alors  $\Delta_2 < \Delta_1 \Rightarrow \beta_{+2} < \beta_{+1}$  et  $\theta_2 > \theta_1$ , l'image de  $F_2$  apparaît au dessus de celle de  $F_1$  l'image du segment  $F_1F_2$  est droite.

Q45. Avec  $y_l \geq l$ . Par exemple on prend  $h = 2$  et on garde les autres paramètres.



### 3 Propagation de la lumière dans un milieu inhomogène

#### 3.1 De l'électromagnétisme à l'optique géométrique

Q46.  $\alpha \approx \lambda/L$  donc pour la notion de rayon lumineux avec « pinceau » cylindrique négliger  $\alpha$  sera possible si  $\lambda \ll L$ . Ce qui est facile pour les fréquences optiques.

Q47. Par le rotationnel de l'équation de Faraday et à l'aide de l'équation d'Ampère :

$$\mathbf{rot rot E} = -\mu_0 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi) \mathbf{E} = \mathbf{grad}(\text{div E}) - \Delta \mathbf{E}$$

$$\text{div E} = -\frac{\text{div P}}{\varepsilon_0} = -\text{div}(\chi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})) = -\chi(\mathbf{r}) \text{div E} + \mathbf{grad}(\chi) \bullet \mathbf{E}$$

Ensuite l'équation de Gauss :

$$\text{div E} = \frac{1}{1 + \chi} \mathbf{grad}(\chi) \bullet \mathbf{E} = \mathbf{E} \bullet \mathbf{grad}(\ln(1 + \chi))$$

D'où : et l'expression de l'énoncé.

Q48.  $\Delta E \approx 1/\lambda^2$  et  $\mathbf{grad}(\dots) \approx (E/\lambda)(1/L)$  avec  $L \gg \lambda$  donc le second terme est négligeable.

Q49.  $S$  est une distance en m,  $\|\mathbf{grad} S\|$  est sans dimension et  $\|\mathbf{grad} S\| \approx 1$ .

Q50.  $\frac{\partial e^{ik_0 S}}{\partial x} = ik_0 \frac{\partial S}{\partial x} e^{ik_0 S}$  puis  $\frac{\partial^2 e^{ik_0 S}}{\partial x^2} = ik_0 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} e^{ik_0 S} - k_0^2 \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 e^{ik_0 S}$  alors en regroupant les

autres dérivées en  $y$  et  $z$  :  $\Delta e^{ik_0 S} = ik_0 \Delta S e^{ik_0 S} - k_0^2 \|\mathbf{grad} S\|^2 e^{ik_0 S}$

Q51. Il faut calculer  $\Delta \mathbf{E}$  : ...

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (e^{ik_0 S} e_{0x}) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (e^{ik_0 S}) e_{0x} + (e^{ik_0 S}) \frac{\partial e_{0x}}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{ik_0 S}) e_{0x} + \frac{\partial}{\partial x} (e^{ik_0 S}) \frac{\partial e_{0x}}{\partial x} + (e^{ik_0 S}) \frac{\partial^2 e_{0x}}{\partial x^2}$$

On en déduit, après avoir calculé les mêmes dérivées en  $y$  et  $z$  :

$$\Delta E_x = \Delta (e^{ik_0 S}) e_{0x} + ik_0 (\mathbf{grad} S \bullet \mathbf{grad}) e_{0x} + e^{ik_0 S} \Delta e_{0x} \text{ idem pour } \Delta E_y \text{ et } \Delta E_z. \text{ On reconstitue}$$

l'équation de la question Q47, elle comporte une partie réelle et une partie imaginaire, la partie

réelle donne :  $-k_0^2 \|\mathbf{grad} S\|^2 \mathbf{E} + e^{ik_0 S} \Delta \mathbf{e}_0 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \mathbf{E} = 0$  le terme du milieu est en  $E/L^2$  alors que les autres sont en  $E/\lambda^2$  donc beaucoup plus grand, d'où l'équation de l'énoncé.

Q52. Dans la question Q47 on a l'expression de  $\text{div E}$  :

$$(1 + \chi) \text{div}(\mathbf{e}_0 e^{ik_0 S}) = (1 + \chi) (e^{ik_0 S} \text{div} \mathbf{e}_0 + \mathbf{grad}(e^{ik_0 S}) \bullet \mathbf{e}_0) = (1 + \chi) (e^{ik_0 S} \text{div} \mathbf{e}_0 + ik_0 (e^{ik_0 S}) \mathbf{grad} S \bullet \mathbf{e}_0) \\ = (e^{ik_0 S}) \mathbf{e}_0 \bullet \mathbf{grad}(\chi)$$

Comme on néglige les variations de  $\text{div} \mathbf{e}_0$  et  $\mathbf{grad} \chi$  en  $1/L$  par rapport à  $k_0$  en  $1/\lambda$ , il reste à l'ordre dominant :  $\mathbf{e}_0 \bullet \mathbf{grad} S = 0$ , le champ  $\mathbf{E}$  est localement perpendiculaire à  $\mathbf{grad} S$ .

Q53. Avec l'équation de Faraday :  $-i\omega \mathbf{B} = \mathbf{rot}(\mathbf{e}_0 e^{ik_0 S}) = e^{ik_0 S} \mathbf{rot}(\mathbf{e}_0) + ik_0 \mathbf{grad} S e^{ik_0 S} \wedge \mathbf{e}_0$  et finalement :  $\mathbf{B} = -\mathbf{grad} S \wedge \mathbf{E} / c$  car le terme en  $\mathbf{rot} \mathbf{e}_0$  est en  $1/L$ .

Q54. Le champ  $\mathbf{B}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{E}$  et comme  $\mathbf{E}$  perpendiculaire à  $\mathbf{grad} S$ , c'est un champ transverse.

Q55. Le vecteur de Poynting  $\mathbf{S} = \text{Re}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}^*) / 2\mu_0 = -(1/\mu_0 c) e_0^2 \mathbf{grad} S$  est porté par  $-\mathbf{grad} S$ .

Q56. Un rayon lumineux est une trajectoire de l'énergie donc une ligne de champ du vecteur de Poynting  $\mathbf{S}$ , ici une ligne de champ de  $-\mathbf{grad} S$ .

Q57. Comme  $\mathbf{u}$  est // à la ligne de champ on peut écrire  $-\mathbf{grad} S = (dS/ds) \mathbf{u}$  or dans la question Q51 :  $(dS/ds)^2 = n^2$  donc  $-\mathbf{grad} S = n\mathbf{u}$ .

Q58. En se servant de l'identité fournie (démonstration d'un cours de mathématiques) pour  $f \equiv S$  et en utilisant les résultats de Q56 et Q51:

$$\mathbf{grad}(\|\mathbf{grad} S\|^2) = 2 \left[ (-n\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \frac{d}{ds} \right] (-n\mathbf{u}) = 2n \mathbf{grad} n \quad \text{soit} \quad 2 \left[ n \frac{d}{ds} \right] n\mathbf{u} = 2n \mathbf{grad} n \quad \text{c'est-à-dire}$$

l'équation (2) en simplifiant par  $2n$ .

### 3.2 De l'optique géométrique à la mécanique du point

Q59.  $v$  est une vitesse.

Q60. Avec le changement de variable proposé :  $\frac{d(n\mathbf{u})}{ds} = \frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{1}{nv^2} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{grad} n$  qu'on

$$\text{peut réécrire en :} \quad m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = mn v^2 \mathbf{grad} n = -\mathbf{grad} \left( -\frac{1}{2} m v^2 n^2 \right) = -\mathbf{grad} U$$

Q61. Le potentiel  $U$  dans la partie 2 est à une constante près  $U \approx -K y$ , analogue à un potentiel de pesanteur uniforme  $mgz$ , d'où les trajectoires des rayons lumineux paraboliques, comme celles de la chute libre dans le champ de pesanteur, la concavité inversée de la parabole est due au signe  $-$  dans  $U$ .

Q62. En mécanique l'accélération normale est dirigée vers le centre de courbure, à l'intérieur de la concavité de la courbe, pour les rayons lumineux le  $\mathbf{grad} n$  local sera dirigé vers l'intérieur de la concavité du rayon.

Q63. En mécanique il faut trois paramètres de position initiale plus trois paramètres de vitesse initiale. En optique il faudra bien sûr trois paramètres d'un point origine du rayon et trois paramètres de la direction initiale du rayon (le  $\mathbf{grad} n$  de départ).

En prenant une primitive de l'équation fondamentale du mouvement, où en appliquant l'équivalent d'un théorème de l'énergie mécanique dans un potentiel  $U$ , on obtient :

$$\frac{1}{2} m v_p^2 = -U + \text{Cte} = \frac{1}{2} m v^2 n^2 + \text{Cte} \quad \text{d'où l'on tire } v_p(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r})v.$$

Q64. Si  $n = \text{Cte}$  alors  $U = \text{cte}$  et  $\mathbf{grad} U = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_p = \text{Cte}$ , la trajectoire est rectiligne, c'est la propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène. L'équivalent mécanique est le système isolé.

Q65. Dans une telle géométrie il n'y a pas de « force » selon la direction  $x$  et  $z$  puisque  $U(y)$  ne dépend pas de  $x$  et  $z$ , donc la composante selon  $x$  (et  $z$  aussi) de la vitesse est conservée à la séparation des milieux :  $v_{px1} = v_{px2}$  soit avec les angles  $i_1$  et  $i_2$  d'incidence  $n_1 v \sin i_1 = n_2 v \sin i_2$ , c'est la loi de Descartes.

Q66. Avec  $U(r)$  on trouve une « force »  $\mathbf{f}(r) = -dU/dr \mathbf{u}_r$  centrale ! Il y a donc conservation du « moment cinétique » de la particule fictive :  $\mathbf{L} = m \mathbf{r} \wedge n \mathbf{v}_p$  d'où la trajectoire plane dans un plan perpendiculaire à  $\mathbf{L}$  et la relation  $L = m r n v \sin i = \text{cte}$  ou  $n r \sin i = \text{cte}$

Q67. La mécanique ondulatoire de Broglie redonne la mécanique classique si  $\lambda = h/mv \ll L$ .

## 4 Réfraction astronomique et dispositifs d'invisibilité

### 3.1 Réfraction astronomique

Q68. La pente du rayon dans la base ( $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi$ ) s'écrit  $\tan i = (rd\phi)/dr$  d'où l'égalité.

Q69. 
$$\frac{d(nr \sin i)}{nr \sin i} = \frac{dn}{n} + \frac{dr}{r} + \frac{\cos i di}{\sin i} = \frac{dn}{n} + \frac{d\phi}{\tan i} + \frac{di}{\tan i} = \frac{dn}{n} + \frac{dR}{\tan i} = 0$$
 d'où l'égalité.

Q70. 
$$D(\delta) = \int_{R_T}^{R_T+h} dR = - \int_{R_T}^{R_T+h} \frac{dn}{n} \frac{\sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 i}} \quad \text{et} \quad \sin i = \frac{n(R_T)R_T \sin \delta}{n(r)r}$$
 d'où le résultat avec  $n'(r) = dn/dr$ .

Q71. Q72. Au dénominateur de l'intégrale on ne garde que le terme en  $1/\sin \delta \approx 1/\delta$  et il reste :

$$D(\delta) \approx -n(R_T)R_T \int_{R_T}^{R_T+h} \frac{n'(r)}{n^2(r)} \frac{1}{r} dr \delta \approx -\delta n(R_T) \left[ -\frac{1}{n} \right]_{R_T}^{R_T+h} = \delta (n(R_T) - 1)$$

. On assigne la valeur  $R_T$  à  $r$  dans l'intégrale vu la faible étendue de l'intervalle d'intégration et  $n(R_T + h) = 1$ .

Q73. Proche de l'horizon  $\delta \approx \pi/2$  on utilisera donc pas une forme approchée obtenue pour  $\delta$  petit.

Q74. Dans l'atmosphère  $n'(r) < 0$ , et  $D(\delta) (> 0)$  est une fonction croissante de  $\delta$ , donc les deux extrémités du diamètre vertical du soleil paraissent dilatées alors que le diamètre horizontal est pratiquement inchangé, d'où un aspect elliptique avec un grand axe vertical.

Q75.  $d_{\text{app}} = 1.39 \cdot 10^6 / 1.5 \cdot 10^8 = 0.93 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 0.93 \cdot 10^{-2} (180/\pi) 60 = 31.85' \text{ d'arc.}$

Q76. Comme  $D$  est plus grand que  $d_{\text{app}}$ , le soleil reste visible alors qu'il est sous l'horizon géométrique.

Q77.  $n_B - 1 = 2.88 \cdot 10^{-4} + 1.63 \cdot 10^{-6} / (0.4)^2 = 2.98 \cdot 10^{-4}$  et  $n_R - 1 = 2.88 \cdot 10^{-4} + 1.63 \cdot 10^{-6} / (0.75)^2 = 2.91 \cdot 10^{-4}$ , soit une variation relative de 2.3 %.

Q78. La couleur qui a le plus petit  $D$  disparaît en premier ce sera donc le rouge qui disparaît d'abord.

Q79. Comme la variation relative du facteur de proportionnalité de  $D$  est 2.3% pour les couleurs extrêmes, il restera environ  $d = 0.023 d_{\text{app}}$  du diamètre du soleil en bleu. La durée de vision peut être estimée avec la rotation du soleil autour de la Terre qui fait un tour soit  $360 \cdot 60 = 21600' \text{ d'arc}$  en un jour = 86400 s :  $\tau = d (86400/21600) = 2.9 \text{ s}$ , c'est le flash bleu !

Q80. Toute l'étude précédente a été faite en négligeant l'absorption de l'atmosphère depuis la question Q13. En réalité la diffusion de Rayleigh absorbe préférentiellement le bleu le long des rayons lumineux, c'est donc la couleur juste au dessus qui est vue transitoirement d'où le rayon vert ...

### 3.2 Dispositifs d'invisibilité

Q81. On part de  $\tan i = rd\theta/dr = r/r'$  d'où l'on tire après passage par les carrés :

$$\sin i = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \quad \text{et l'invariant } n r \sin i = \text{cte est exprimé par la forme (4).}$$

Q82.  $\sin \theta_1 = a/R_2$ .

L'intérêt de passer par la valeur en  $\theta = \pi/2$  est de ne pas s'encombrer avec le terme en  $r'(\theta)$  qui est compliqué dans le cas général alors qu'ici il est nul, on écrit donc l'expression (4) en  $\theta_l$  et en

$$\pi/2 : \frac{R_2^2 n(R_2^-)}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 \frac{a^2 \cos^2 \theta_l}{\sin^4 \theta_l}}} = \frac{R_2^2 n(R_2^-)}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 R_2^2 \frac{(1 - \sin^2 \theta_l)}{\sin^2 \theta_l}}} = r(\pi/2) n(\pi/2)$$

$$\text{Puis : } \frac{R_2^2 n(R_2^-)}{\sqrt{R_2^2 + (R_2 - R_1)^2 \left(\frac{R_2^2}{a^2} - 1\right)}} = \frac{R_2^2 n(R_2^-)}{\sqrt{R_2^2 + (R_2 - R_1)^2 \left(\frac{(R_2 - R_1)^2}{(r(\pi/2) - R_1)^2} - 1\right)}} = r(\pi/2) n(\pi/2)$$

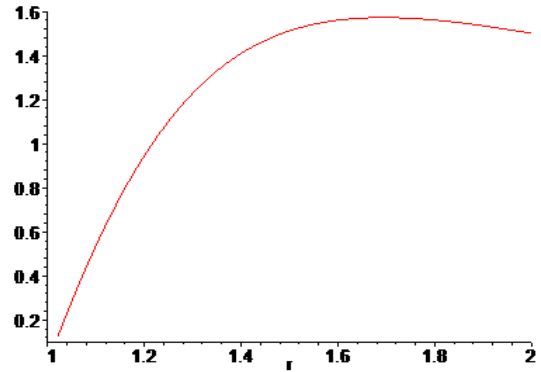
Si l'on admet que ce calcul fait dans un cas particulier se généralise  $\forall \theta$ , on reconnaît alors la forme (5).

Q83. Voir l'exemple ci-contre en prenant  $R_l = 1$ ,  $R_2 = 2$  et  $n(R_2^-) = 1.5$  ; On note un maximum de  $n$  au voisinage de  $r_{\max} = 1.7$ .

L'indice  $n(0)$  doit être nul ! Et il est  $< 1$  dans la partie centrale de la calotte sphérique.

Q84. Un indice nul correspond à une vitesse de phase  $v_\phi = c/n$  infinie c'est-à-dire à la propagation instantanée ce qui est inacceptable en physique.

Pour l'influence en longueur d'onde, on peut penser que  $n(r, \lambda)$  ne pourra pas vérifier la relation (5), dépendante surtout de la géométrie, pour une large plage de longueur d'onde.



Q85. Tous les rayons au voisinage de l'axe  $y$  ont une courbure dirigée vers le centre du système or la question Q62 demandait que les courbures soient dirigées vers les indices croissants ce qui va bien pour la couronne extérieure ( $r > r_{\max}$ ) mais pas pour la partie  $r < r_{\max}$  !

Q86. La susceptibilité sera alors une matrice  $[\chi]$ . On rencontre ces milieux dans les lames cristallines anisotropes quart d'onde par exemple.

Q87. On ne peut voir sans être vu !! C'est le principe du retour inverse de la lumière ...

-----