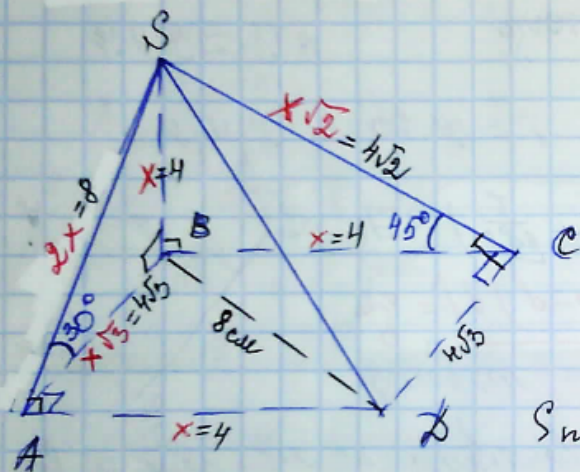


№245



$ABCD$ - прямоугольник
диagonalев 8 см

$$(SAB) \perp (ABC), (SBC) \perp (ABC)$$

$$\angle((ABS); (ADC)) = 30^\circ$$

$$\angle((CDS); (ADC)) = 45^\circ$$

$S_{\text{полн}} = ?$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = S_{ABS} + S_{CBS} + S_{CDS} + S_{ADS} + S_{ABCD}$$

1). Определим линейный угол для двугранного $\angle SADC =$
 $= \angle((ABS); (ADC)) = 30^\circ$, AD - ребро $\perp SADC$;

По ТТП: $SB \perp AB$ (по усл), $AB \perp AD$ (прямоуг.) $\Rightarrow SA \perp AD$
 $\Rightarrow \angle SAB = 30^\circ$ - линейный для двугранного $\angle SADC$.

2) Определим линейный $\angle$ для двугранного $\angle SCDA =$
 $= \angle((SBC); (ADC)) = 45^\circ$, DC - ребро $\perp SADC$

По ТТП: $SB \perp BC$; $BC \perp CD$ (прямоуг.) $\Rightarrow SC \perp CD$.
 $\Rightarrow \angle BCS = 45^\circ$ - линейный для двугранного $\angle SCDA$.

3). Т.к. числовых данных мало, введем x :

Пусть $BC = x$, тогда $AD = x$, $SB = x$ (т.к. в $\triangle SBC$ - прямоугол с $\angle 45^\circ$ - гипот)

Из $\triangle SBC$: по т. Пифагора $SC = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$

Из $\triangle ABS$ по св-ву катета напротив $\angle 30^\circ$ $AS = 2x$

По т. Пифагора: $AB = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$

$\triangle ABD$ - прямоугол. по т. Пифагора: $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$$(x\sqrt{3})^2 + x^2 = 8^2$$

$$3x^2 + x^2 = 64$$

$$4x^2 = 64$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4\text{ см}$$

$\Rightarrow$

$$AD = 4\text{ см}$$

$$BC = 4\text{ см}$$

$$SB = 4\text{ см}$$

$$AS = 2 \cdot 4 = 8\text{ см}$$

$$AB = 4\sqrt{3}\text{ см}$$

$$CD = AB = 4\sqrt{3}\text{ см}$$

$$SC = 4\sqrt{2}\text{ см}$$

$$4) S_{ABCD} = AB \cdot AD = 4\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3} \text{ см}^2$$

$$5) S_{SAB} = \frac{1}{2} AB \cdot SB = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3} \text{ см}^2$$

$$6) S_{SBC} = \frac{1}{2} BC \cdot SB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 \text{ см}^2$$

$$7) S_{ADS} = \frac{1}{2} AD \cdot AS = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16 \text{ см}^2$$

$$8) S_{SCDS} = \frac{1}{2} CD \cdot SC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{6} \text{ см}^2$$

$$S_{\text{полн}} = 16\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{6} + 8 + 16 = 24\sqrt{3} + 8\sqrt{6} + 24 = 8(3\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3) \text{ см}^2$$

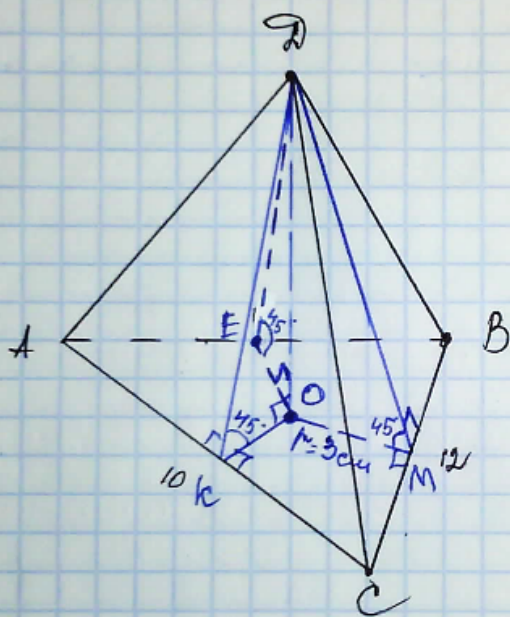
~248

$$AC = AB = 10 \text{ см}, BC = 12 \text{ см}$$

$$\angle DACB = \angle DBCA = \angle DABC = 45^\circ$$

$$S_{\text{бок}} = ?$$

$$S_{\text{бок}} = S_{\triangle DAB} + S_{\triangle DAC} + S_{\triangle DBC}$$



1. Построим линейные углы для вычисления.

Проведем высоту пирамиды $DO \perp (ABC)$

а) $OK \perp AC$ (постр.) $\Rightarrow DK \perp AC$

$\Rightarrow \angle DKO = 45^\circ$ - линейный для $\angle DACB$.

б) $DM \perp BC$ (постр.) $\Rightarrow DM \perp BC \Rightarrow \angle DMO = 45^\circ$ - линейный для $\angle DBCA$.

в) $DE \perp AB$ (постр.) $\Rightarrow DE \perp AB \Rightarrow \angle DEO = 45^\circ$ - линейный для $\angle DABC$.

2) $\triangle DKO = \triangle DMO = \triangle DEO$ (по катету DO и остр. $\angle 45^\circ$)

$\Rightarrow DK = DM = DE$ (равны высоты боковых граней.)

ПОМНИТЬ!

и $OD=OM=OE$, т.е. O - центр вписанной окр.-ти!

Значит, найдем радиус $r=OK=OM=OE$, найдем высоту боков. граней, след-о и $S_{бок}$!

③ Т.к. r - радиус вписанной окр.-ти, то его можно найти из ср.-лог:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} Pr \Rightarrow r = \frac{2S_{\Delta}}{P}$$

Найдем $S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p - полупериметр

$$p = \frac{10+10+12}{2} = 16; \quad S_{\Delta ABC} = \sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)} = 48 \text{ см}^2$$

$$r = \frac{2 \cdot 48}{32} = 3 \text{ см.}$$

Из ΔDOM ($r/6$, т.к. Δ - прямоуго. с $\angle 45^\circ$) $OD=OM=3$ см
по т. Пифагора $DM = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2} \text{ см} \Rightarrow DK=DE=3\sqrt{2}$.

Т.к. высоты боков. граней равны, обозначим их h

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S_{бок} &= S_{DAB} + S_{DAC} + S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h + \frac{1}{2} AC \cdot h + \frac{1}{2} BC \cdot h = \\ &= \frac{1}{2} h (AB+AC+BC) = \frac{1}{2} h \cdot P_{\Delta} \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } S_{бок} = \frac{1}{2} P_{\Delta} \cdot h$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 3\sqrt{2} = 48\sqrt{2} \text{ см}^2,$$

Ответ: $48\sqrt{2} \text{ см}^2$.

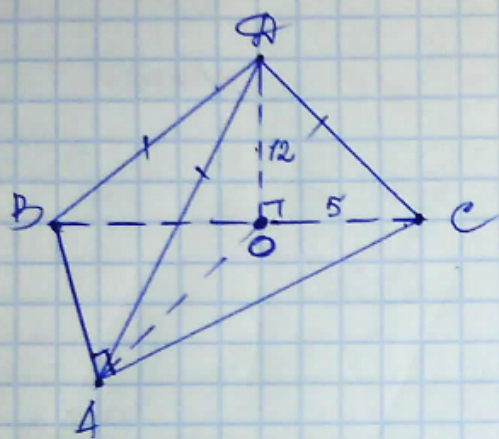
Вывод: Свойства пирамиды, у которой двугранное углы при основании равны!

1). Высота боковых граней равна

2). Основание высоты пирамиды — центр вписанной окружности

3). $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h$, h - высота боков. грани.

~251



$DA = DB = DC$, $DO = 12$ - высота
 $BC = 10$.

Найти боковое ребро.

Вопрос: где находится т. O - основание высоты DO?

Докажем, что $O \in BC$

$\triangle DOB = \triangle DOC = \triangle DOA$ - прямоугол: по гипотенузе и катету
кобег DO-общ, гипотенузот + ребра $DA = DB = DC$ по улов.

$\Rightarrow DO = DB = DC$, т.е. O - центр описанной около
 $\triangle ABC$ окружности. Т.к. $\triangle ABC$ прямоугольной,
то центр описанной окр - т.е. - середина гипотенузы

$\Rightarrow BO = OC = \frac{1}{2} BC = 5 \text{ см}$

из $\triangle DOC$ по т. Пифагора $DC = \sqrt{DO^2 + OC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ см}$

Ответ: 13 см.

Еще свойства пирамид!

Если у пирамиды боковые ребра равны:

- 1) Основание высоты пирамиды -
центр описанной окружности около
основания
- 2) Боковые ребра имеют равные углы с осно-
ванием

(из равенства $\triangle DOB = \triangle DOC = \triangle DOA$) ↑

№ 258

$EABCD$ - правильная пирамида

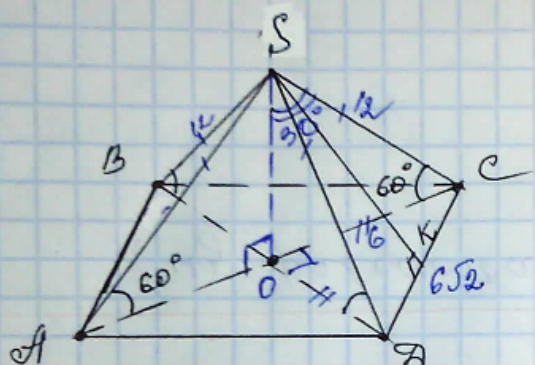
$$\angle(\text{бок. ребр.; осн}) = 60^\circ$$

бок. ребро 12 см.

$S_{\text{поверх}} = ?$

$$S_{\text{поверх}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P \cdot d, \quad d - \text{апофема.}$$



1) Угол между бок. ребром (прямым) и перпендикуляром к основанию - угол между прямой и её проекцией на плоскость.

$SO \perp (ABCD)$ - высота пирамиды (O - центр $ABCD$)

$$\Rightarrow \angle(\text{бок. ребр.; осн}) = \angle SOB = 60^\circ$$

2) $\triangle SOC$ - прямоугольный, $\angle SCO = 60^\circ \Rightarrow \angle CSO = 30^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow OC = \frac{1}{2} SC = 6 \text{ см.}$

3) $\triangle COD$ - р/б, прямоугольный (св. во диагон. квадрата)

$$DC = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \text{ см}$$

4) SK - высота $\triangle DOC$ (р/б: по теореме $SD = SC$); $OC = \frac{1}{2} DC = 3\sqrt{2}$

$$\text{По т. Пифагора в } \triangle SKC: SK = \sqrt{SC^2 - KC^2} = \sqrt{12^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{144 - 18} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

$$\text{Т.е. } d = SK = 3\sqrt{14} \text{ см.}, \quad P = 6\sqrt{2} \cdot 4 = 24\sqrt{2} \text{ см}$$

$$5) S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot 24\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{14} = 36\sqrt{28} = 72\sqrt{7}$$

$$S_{\text{осн}} = DC^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72 \text{ см}^2$$

$$S_{\text{поверх}} = 72\sqrt{7} + 72 = 72(\sqrt{7} + 1) \text{ см}^2$$

$$\text{Ответ: } 72(\sqrt{7} + 1) \text{ см}^2$$