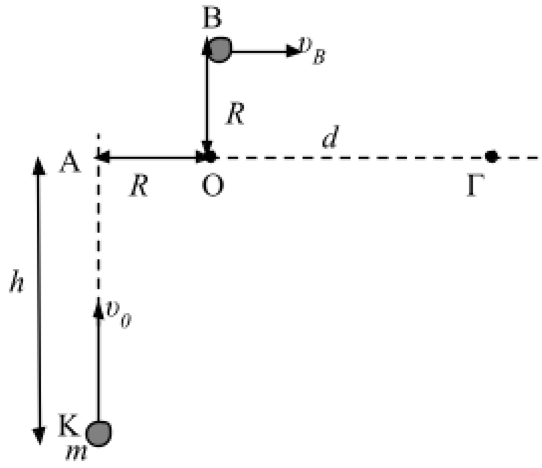
Από κατακόρυφη σε οριζόντια βολή



Το σημειακό αντικείμενο του σχήματος έχει μάζα $m = 0,5kg$ και εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω από το σημείο Κ. Αφού ανέλθει κατά $h = 2m$, εισέρχεται εφαπτομενικά στο λείο ακλόνητο τεταρτοκύκλιο κέντρου Ο και ακτίνας $R = 1m$ και *ολισθαίνει* από το Α ως το Β. Αφού εγκαταλείψει το τεταρτοκύκλιο στο σημείο Β, με οριζόντια ταχύτητα υ_B περνάει από το σημείο Γ, που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τα σημεία Ο και Α, όπου $ΟΓ = d = 3m$.

α) Ποια είναι η ταχύτητα υ_B του σώματος στο Β;

β) Με ποια ταχύτητα υ_0 εκτοξεύτηκε και ποια είναι η ταχύτητα υ_A όταν περνάει από το Α;

γ) Ποια είναι η μεταβολή της ορμής του κατά την κίνηση στο τεταρτοκύκλιο;

δ) Βρείτε την κάθετη αντίδραση που ασκεί το τεταρτοκύκλιο στο σώμα όταν διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

ε) Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή της απόστασης $ΟΓ = d$, ώστε το αντικείμενο να ολισθαίνει σε ολόκληρη την επιφάνεια του τεταρτοκύκλιου;

Δίνεται $g = 10m/s^2$.

Απάντηση

α) Το σώμα εκτελεί οριζόντια βολή και για να φτάσει στο Γ χρειάζεται χρόνο

$$t = \sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{\frac{2.1}{10}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}s.$$

Η οριζόντια μετατόπιση είναι $x = d = 3m$

$$x = \upsilon_B t_{καθ} \Leftrightarrow x = \upsilon_B \sqrt{\frac{2R}{g}} \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας η *(1)* δίνει

$$3 = \upsilon_B \sqrt{\frac{2.1}{10}} \Leftrightarrow 3 = \upsilon_B \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \upsilon_B = 3\sqrt{5}m/s$$

β) Παίρνουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από το Κ στο Β, λαμβάνοντας υπόψη ότι η κάθετη αντίδραση που ασκεί το λείο τεταρτοκύκλιο στο σώμα, δεν παράγει έργο.

$$\Delta K = W_W + W_N \Leftrightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mg(h+R) \Leftrightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\upsilon_B^2 + 2g(h+R)}$$

$$\Leftrightarrow \upsilon_0 = \sqrt{45+20.3} \Leftrightarrow \upsilon_0 = \sqrt{105} \Leftrightarrow \upsilon_0 = 10,2m/s.$$

Με το Θ.Μ.Κ.Ε. από το Κ ως το Α έχουμε

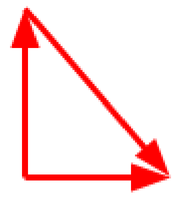
$$\Delta K = W_W \Leftrightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mgh \Leftrightarrow \upsilon_A = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}$$

$$\Leftrightarrow \upsilon_A = \sqrt{105-20.2} \Leftrightarrow \upsilon_A = \sqrt{65} \Leftrightarrow \upsilon_A = 8{,}1m/s$$

γ) Για τα μέτρα των διανυσμάτων ισχύει

$$p_A = m\upsilon_A \Leftrightarrow p_A = 4{,}05kgm/s$$

$$p_B = m\upsilon_B \Leftrightarrow p_B = 1{,}5\sqrt{5} \Leftrightarrow p_B = 3{,}35kgm/s$$



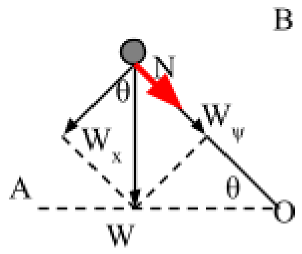
Από το διπλανό σχήμα

$$\Delta p = \sqrt{p_A^2 + p_B^2} \Leftrightarrow \Delta p = \sqrt{4{,}05^2 + 3{,}35^2} \Leftrightarrow$$

$$\Delta p = \sqrt{4{,}05^2 + 3{,}35^2} \Leftrightarrow \Delta p = 5{,}25kgm/s$$

Η διεύθυνση του διανύσματος καθορίζεται από την $\varepsilon\varphi\theta = \frac{p_B}{p_A} = 0{,}83 \Leftrightarrow \theta \approx 40^0$

δ) Σε τυχαία θέση κατά την άνοδο στο τεταρτοκύκλιο η συνισταμένη των δυνάμεων στη διεύθυνση της ακτίνας πρέπει να δίνει την απαιτούμενη κεντρομόλο δύναμη



$$\Sigma F_R = F_K \Leftrightarrow N + W_\psi = m\frac{\upsilon^2}{R} \Leftrightarrow N = m\frac{\upsilon^2}{R} - W_\psi$$

$$\Leftrightarrow N = m\left(\frac{\upsilon^2}{R} - g\eta\mu\theta\right) \; (2)$$

Στη θέση Α όπου $\theta = 0$ έχουμε

$$N_A = m\frac{\upsilon_A^2}{R} = 0{,}5.\frac{65}{1} = 32{,}5N$$

Στη θέση Β όπου $\theta = 90^0$ έχουμε

$$N_B = m\left(\frac{\upsilon_B^2}{R} - g\right) = 0{,}5\left(\frac{45}{1} - 10\right) = 17{,}5N$$

ε) Από τη σχέση (2) παρατηρούμε ότι όσο το σώμα ανέρχεται η γωνία θ αυξάνεται, η ταχύτητα υ μειώνεται και το μέτρο της N μειώνεται. Στην ανώτερη θέση θα έχει την ελάχιστη τιμή του $N_B = m\left(\frac{\upsilon_B^2}{R} - g\right) \; (3)$

Για να μη χάνεται η επαφή $N_B \geq 0 \xrightarrow{(3)} \frac{\upsilon_B^2}{R} - g \geq 0 \Leftrightarrow \upsilon_B^2 \geq gR$, δηλαδή η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας στο Β θα πρέπει να είναι $\upsilon_{B,min} = \sqrt{gR}\ (4)$

Με αυτή την ταχύτητα μπορεί να επιτευχθεί η ελάχιστη τιμή της απόστασης *d* που από την (1) θα είναι

$$d_{min} = \upsilon_{B,min}\sqrt{\frac{2R}{g}} \xrightarrow{(4)} d_{min} = \sqrt{gR}\sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} = 1{,}41m$$

Ανδρέας Ριζόπουλος