Дисциплина: ОД.07 Математика
Занятие № 67 **Группа ТТГ 1/1-9/25** **Дата: 27.01.2026**
Тип занятия: практическое занятие 28 **Преподаватель: Бережная В.А.**
Тема занятия: Преобразование графиков тригонометрических функций

Цель занятия:
Деятельностная:
– создать условия для формирования навыков построения графиков тригонометрических функций.
Содержательная:
– актуализировать знания обучающихся об основных видах преобразования графиков функций;
– расширить знания учеников за счет включения новых определений: амплитуда, частота, начальная фаза для тригонометрических функций;
– познакомиться с задачами на построение графиков сложных тригонометрических функций.
План занятия:
1. Сжатие и растяжение графиков тригонометрических функций.
2. Преобразование графиков тригонометрических функций

1. Сжатие и растяжение графиков тригонометрических функций.

Растяжение и сжатие графиков тригонометрических функций по оси OX

Общие принципы растяжения и сжатия графиков по оси OX:

1. При сравнении графиков двух функций $y_1 = f(x),\ y_2 = f(px),\ p > 0,$ график второй функции **сжимается** в p раз по оси OX по сравнению с графиком первой функции.

2. При сравнении графиков двух функций $y_1 = f(x),\ y_2 = f(x/p),\ p > 0,$ график второй функции **растягивается** в p раз по оси OX по сравнению с графиком первой функции.

Эти принципы справедливы и для тригонометрических функций.

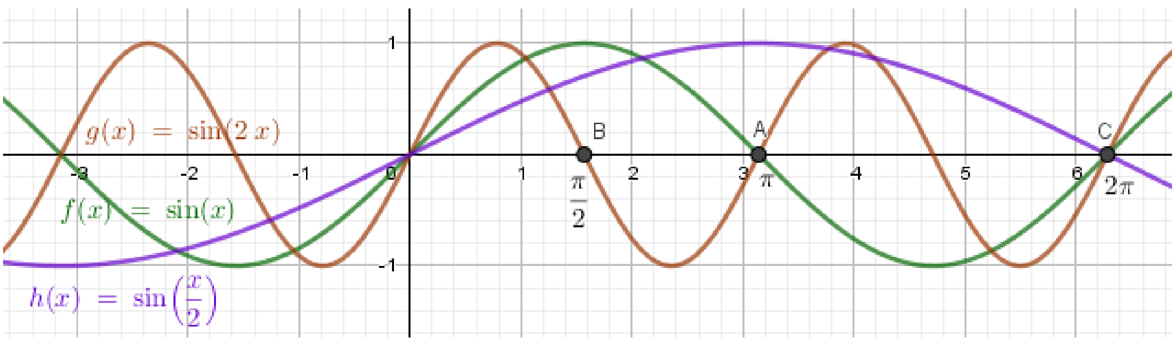
Тригонометрические функции являются периодическими: синус и косинус с периодом 2π, тангенс и котангенс – с периодом π. Получаем следствие общих принципов:

1. При сравнении двух тригонометрических функций $y_1=f(x),\ y_2= f(px),\ p>0,$ период второй функции уменьшается в p раз: $T_2=T_1/p$.

2. При сравнении двух тригонометрических функций $y_1=f(x), y_2=f(x/p),\ p>0,$ период второй функции увеличивается в p раз: $T_2=pT_1$

Построим в одной системе координат три графика:

$$f(x) = sinx,\ \ g(x) = sin2x,\ \ h(x) = sin\frac{x}{2}$$



Период колебаний функции $g(x) = sin2x$ в 2 раза меньше: $T_g = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Период колебаний функции $h(x) = sin\frac{x}{2}$ в 2 раза больше: $T_h = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$.

Растяжение и сжатие графиков тригонометрических функций по оси OY

1. Общие принципы растяжения и сжатия графиков по оси OY:

При сравнении графиков двух функций

$$y_1 = f(x),\ y_2 = Af(x),\ A > 0$$

график второй функции растягивается в A раз по оси OY по сравнению с графиком первой функции.

2. Общий принцип сжатия графиков:

$$y_1 = f(x),\ y_2 = (1/A)f(x),\ A > 0$$

При сравнении графиков двух функций

график второй функции сжимается в A раз по оси OY по сравнению с графиком первой функции.

Эти принципы справедливы и для тригонометрических функций.

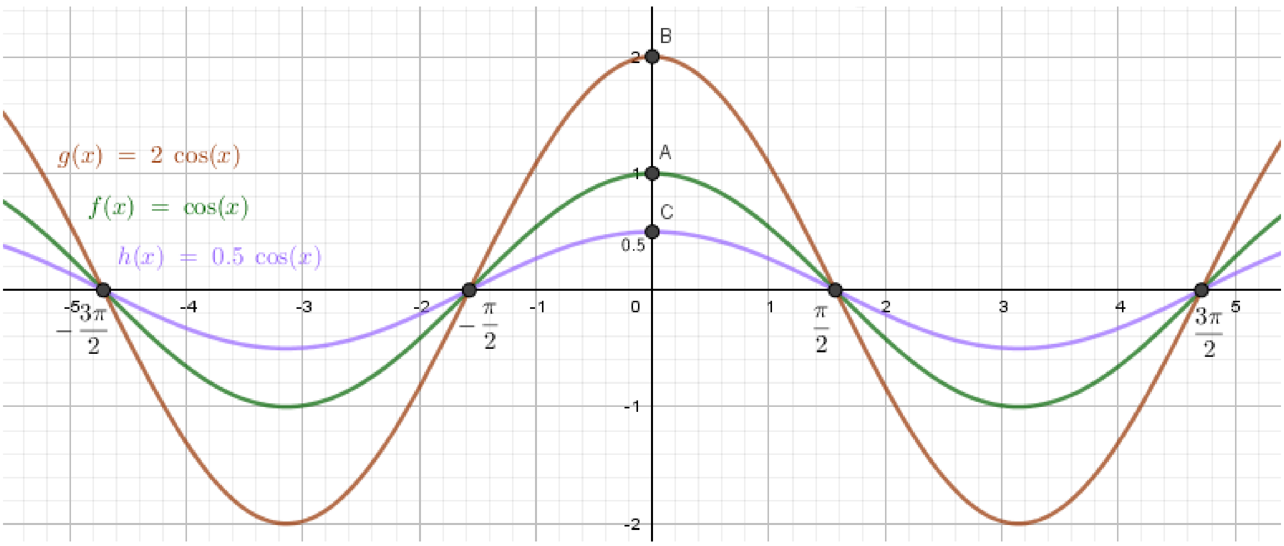
Т.к. для графиков синуса и косинуса (синусоиды) характерна амплитуда колебаний, то также говорят, что:

– умножение на параметр A > 1 увеличивает амплитуду колебаний в A раз;

– деление на параметр A > 1 уменьшает амплитуду колебаний в A раз.

Построим в одной системе координат три графика:

$$f(x) = cosx,\ \ g(x) = 2cosx,\ \ h(x) = \frac{1}{2}cosx$$



Умножение на A=2 увеличивает амплитуду колебаний в 2 раза. Область значений функции g(x)=2cosx : y ∈[–2;2]. График растягивается по оси OY.

Деление на A=2 уменьшает амплитуду колебаний в 2 раза. Область значений функции h(x)=½ cosx : y ∈ [– ½ ; ½]. График сжимается по оси OY.

2. Преобразование графиков тригонометрических функций

Параллельный перенос графиков тригонометрических функций по оси OX

Общие принципы переноса по оси OX:

1. При сравнении графиков двух функций $y_1 = f(x),\ y_2 = f(x + a),\ a > 0$, график второй функции смещается влево на а по оси OX по сравнению с графиком первой функции.

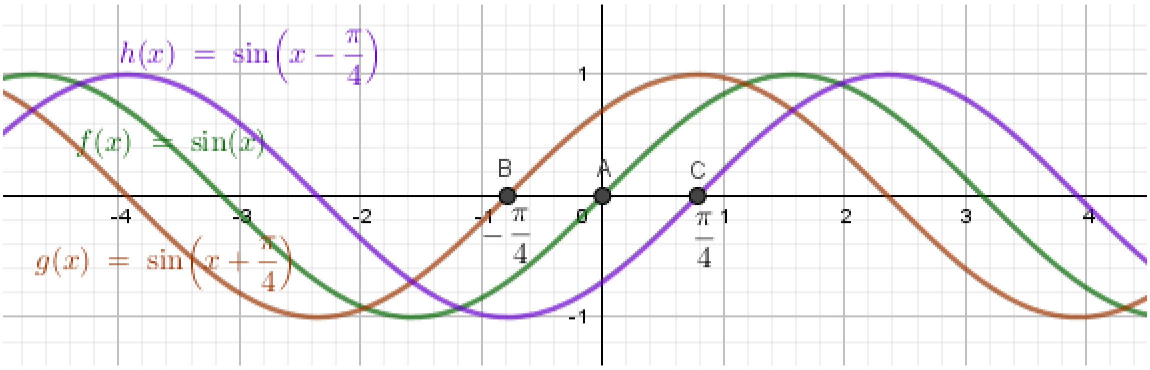
2. При сравнении графиков двух функций $y_1 = f(x)$, $y_2 = f(x - a)$, $a > 0$, график второй функции смещается вправо на а по оси ОХ по сравнению с графиком первой функции.

Эти принципы справедливы и для тригонометрических функций.

При этом параметр х называют **начальной фазой колебаний**. При сравнении двух тригонометрических функций y_1=f(x) и y_2=f(x±a) говорят, что у второй функции сдвиг по фазе равен ±a.

Построим в одной системе координат три графика:

$$f(x) = sinx, \ \ g(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \ \ h(x) = sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



Функция g(x)=sin(x+π/4) сдвинута на π/4 влево по сравнению с f(x).

Функция h(x)=sin(x–π/4) сдвинута на π/4 вправо по сравнению с f(x).

Параллельный перенос графиков тригонометрических функций по оси OY

Общие принципы переноса по оси OY:

1. При сравнении графиков двух функций

$$y_1 = f(x), \ y_2 = f(x) + a, \ a > 0$$

график второй функции смещается **вверх** на а по оси OY по сравнению с графиком первой функции.

2. При сравнении графиков двух функций

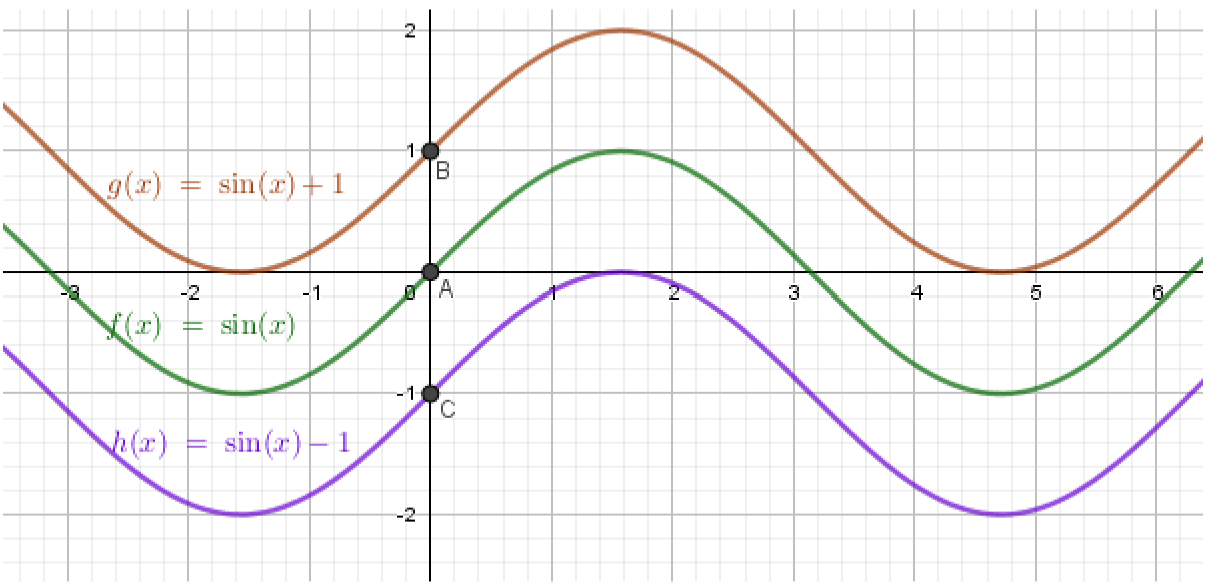
$$y_1 = f(x), \ y_2 = f(x) - a, \ a > 0$$

график второй функции смещается **вниз** на а по оси OY по сравнению с графиком первой функции.

Эти принципы справедливы и для тригонометрических функций.

Построим в одной системе координат три графика:

$$f(x) = sinx, \ \ g(x) = sinx + 1, \ \ h(x) = sinx - 1$$



Функция g(x)=sinx+1 сдвинута на 1 вверх по сравнению с f(x).

Функция h(x)=sinx–1 сдвинута на 1 вниз по сравнению с f(x).

Общее уравнение синусоиды

Синусоида – плоская кривая, которая задается в прямоугольной системе координат уравнением:

$$y(x)=Asin(cx+d)+B$$

где

A – амплитуда, характеризует растяжение графика по оси OY

B – вертикальный сдвиг, характеризует сдвиг графика по оси OY (вверх/вниз)

c – циклическая частота, характеризует период колебаний и растяжение графика по оси OX

d – начальная фаза, характеризует сдвиг графика по оси OX(влево/вправо)

График *y(x)=Asin(cx+d)+B* также называют синусоидой. Термин «косинусоида» употребляется относительно редко.

Поскольку график косинуса получается из графика синуса сдвигом по фазе на π/2 влево, вводить термин «косинусоида» излишне.

Например:

Построим график $g(x) = 3sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

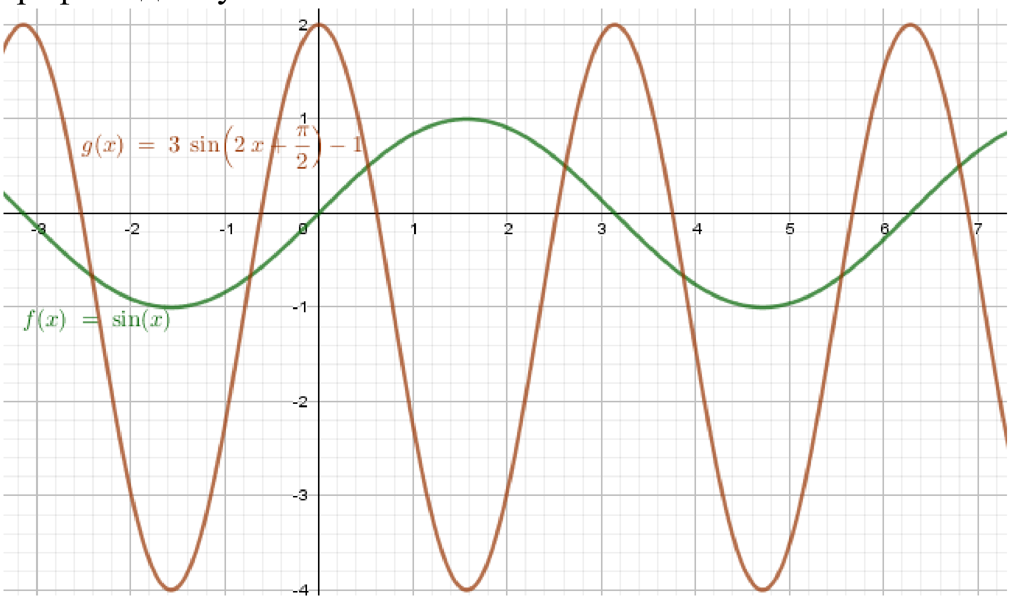
По сравнению с $f(x) = sinx$:

A=3 – график растянут по оси OY в 3 раза

c=2 – период меньше в 2 раза T=π, график сжат в 2 раза по оси OX

d=π/2 – начальная фаза положительная, график сдвинут на π/(2·2)=π/4 влево

B= –1 – график сдвинут по оси OY на 1 вниз.

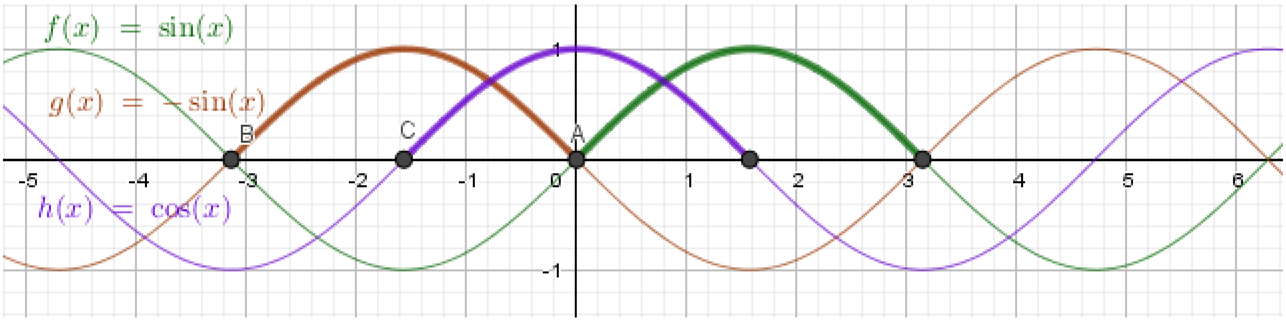


Примеры

Пример 1.Постройте в одной системе координат графики:

$$f(x) = sinx, \;\; g(x) = -sinx, \;\; h(x) = cosx$$

Найдите сдвиг по фазе для g(x) и h(x) в сравнении с f(x)



Сдвиг по фазе удобно определять по главной арке синусоиды.

Для f(x)=sinx главная арка определена на отрезке $0 \le x \le \pi$

Для g(x)=–sinx главная арка определена на отрезке $-\pi \le x \le 0$, т.е. сдвинута на π влево от f(x). Это означает, что: $f(x) = g(x+\pi)$, $sinx = -sin(x+\pi)$

Для h(x) = cosx главная арка определена на отрезке $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, т.е. сдвинута на $\pi/2$ влево от f(x). Это означает, что: $f(x) = h\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $sinx = cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Пример 2. Найдите наименьшие положительные периоды функций:

а) y=sin5x

Период синуса 2π уменьшается в 5 раз. Получаем: $T=2\pi/5$

б) $y=\cos(x\pi)$

Период косинуса 2π уменьшается в π раз. Получаем: $T=2\pi/\pi=2$

в) $y = tg\frac{x}{4}$

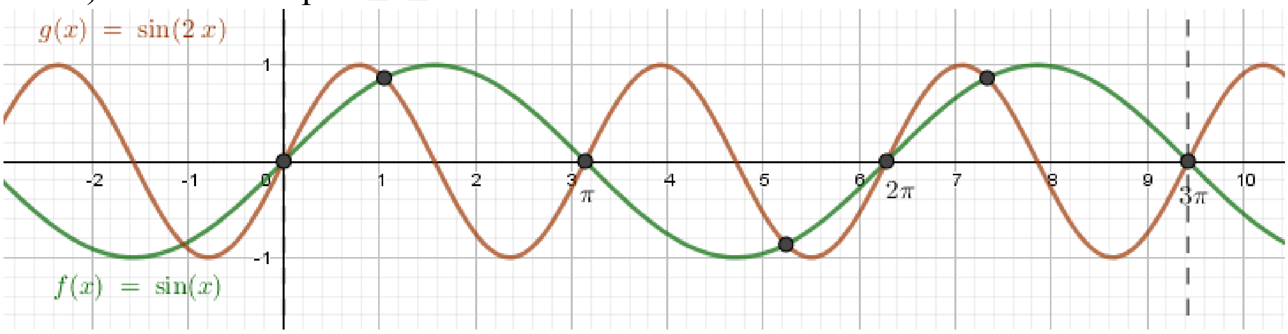
Период тангенса π увеличивается в 4 раза. Получаем: $T=4\pi$

г) $y = tg\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

Период тангенса π уменьшается в 2 раза. Получаем: $T=\pi/2$

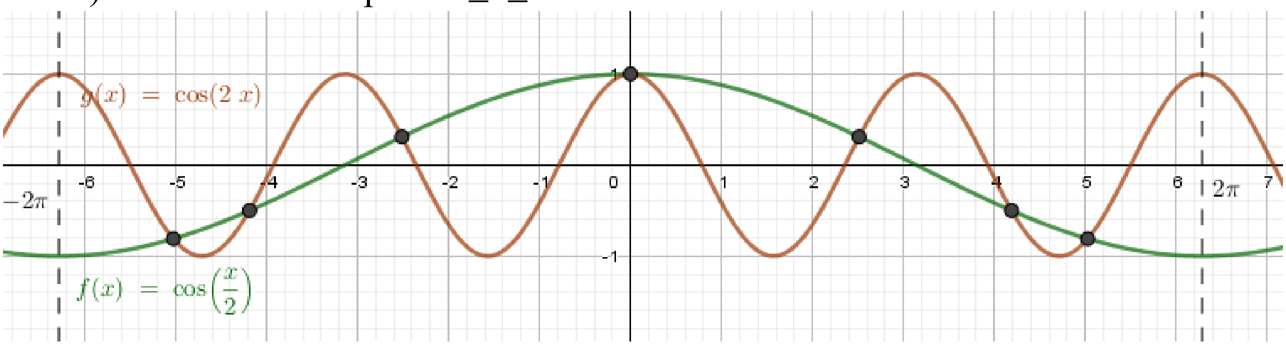
Пример 3. Определите графически, сколько корней имеет уравнение на отрезке:

а) sinx=sin2x при $0 \le x \le 3\pi$



Ответ: 7 корней

б) $cos\frac{x}{2} = cos2x$ при $-2\pi \le x \le 2\pi$



Ответ: 7 корней

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

1.1. По каким правилам осуществляется растяжение (сжатие) тригонометрической функции относительно оси Ох?

1.2. По каким правилам осуществляется растяжение (сжатие) тригонометрической функции относительно оси Он?

1.3. По каким правилам осуществляется смещение тригонометрической функции относительно оси Ох?

1.4. По каким правилам осуществляется смещение тригонометрической функции относительно оси Оу?

2. Решите предложенные задания (письменно):

2.1. Найдите наименьшие положительные периоды функций:

а) $y=sin3x$; в) $y=sin4x$;

б) $y=cos(2\pi x)$; г) $y=cos(2x)$.

2.2. Построить график функции $y = cos + 1$.

2.3. Построить график функции $y=3sin(x - \pi)$.

ОТЧЕТНОСТЬ

Работы принимаются до 3 февраля 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 27.01.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 27.01.25 (Иванов Иван, ТТГ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате: https://t.me/+leGPsDn5EF8yMGIy

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.