

LVIII Белорусская математическая олимпиада школьников

II этап

8 декабря 2007 года

10 класс (12 летнее обучение)

1. Докажите, что графики всех квадратных функций $y = x^2 + px + q$, для которых $q = \frac{p}{2} + 2007$, проходят через одну точку.
2. Отрезки AK и BM – медианы треугольника ABC . Докажите, что если $\angle CAK = \angle CBM = 30^\circ$, то треугольник ABC – равносторонний.
3. Все пятизначные числа, составленные из цифр от 1 до 5 без повторений, занумерованы в порядке возрастания. Какой номер имеет число 43521?
4. Доказать, что четыре расстояния от точки окружности до вершин вписанного в нее квадрата не могут одновременно быть рациональными числами.
5. Докажите, что если $x + \frac{1}{x}$ – целое, то $x^n + \frac{1}{x^n}$ – тоже целое ($n \in \mathbb{N}$).