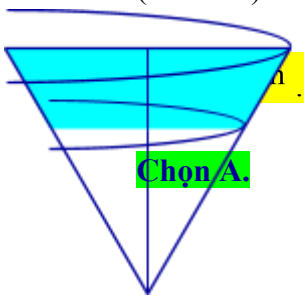
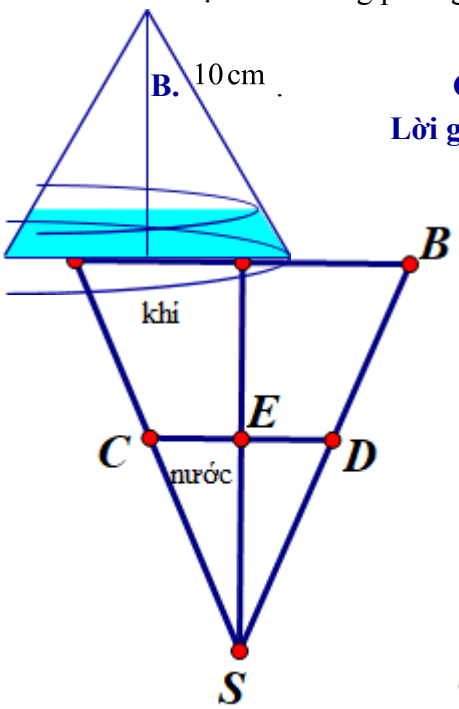
Câu 40. **[2H2-1.1-4] (THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018)** Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là $20\,\text{cm}$. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng $10\,\text{cm}$ (hình H1). Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên (hình H2) thì chiều cao của cột nước trong phễu gần bằng với giá trị nào sau đây?

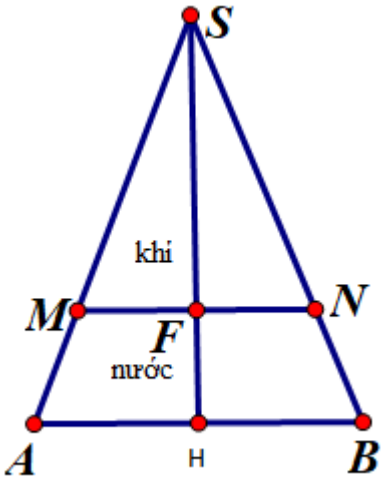


A. $8\,\text{cm}$. **B.** $10\,\text{cm}$. **C.** $1,07\,\text{cm}$. **D.** $1,35\,\text{cm}$.

Chọn A.

Lời giải





Trước khi lật phễu lên:

Theo bài ra ta có $SE = 10\text{cm}$, $SH = 20\text{cm}$. $\Delta SCD \,\#\, \Delta SAB \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{SE}{SH} = \dfrac{ED}{HB}$

Suy ra $\dfrac{V_{nuoc}}{V_{pheu}} = \dfrac{ED^2.SE}{HB^2.SH} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{khi} = \dfrac{7}{8}V_{pheu}$.

Sau khi lật phễu lên:

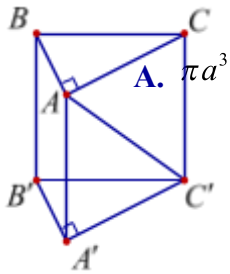
$$\Delta SMN \,\#\, \Delta SAB \Rightarrow \frac{SF}{SH} = \frac{FN}{HB}$$

Do $V_{khi} = \dfrac{7}{8}V_{pheu} \Leftrightarrow \left(\dfrac{FN}{HB}\right)^2.\dfrac{SF}{SH} = \dfrac{7}{8} \Leftrightarrow \left(\dfrac{SF}{SH}\right)^3 = \dfrac{7}{8} \Leftrightarrow SF = \dfrac{\sqrt[3]{7}}{2}SH$.

Vậy chiều cao của nước sau khi lật phễu là

$$FH = SH - SF = SH\left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) = 20.\left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) \approx 0,8706$$

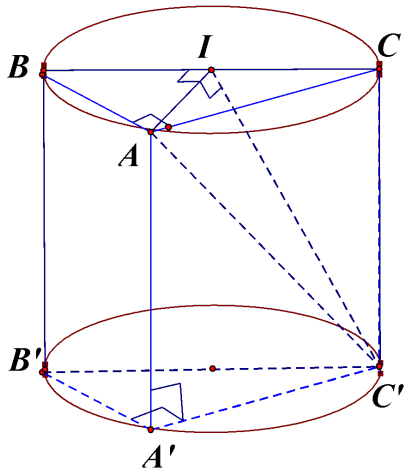
Câu 28. **[2H2-1.1-4] (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $30°$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng



A. πa^3. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $3\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi bán kính của hình trụ là R.

Ta có: $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AI$.

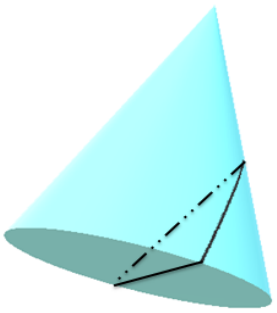
Lại có tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A nên $AI \perp BC$ do đó $AI \perp (BCC'B')$ hay góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\widehat{IC'A}$.

Xét tam giác AIC' ta có: $IC' = \dfrac{AI}{\tan \widehat{IC'A}} = R\sqrt{3}$.

Xét tam giác CIC' ta có: $IC'^2 = IC^2 + CC'^2 \Leftrightarrow 3R^2 = R^2 + 4a^2 \Rightarrow R = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \pi R^2.h = 4\pi a^3$.

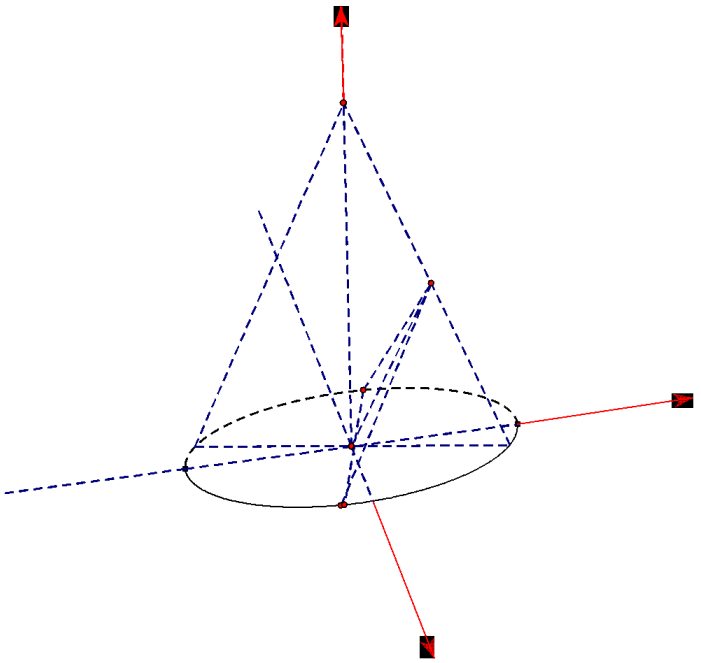
Câu 49: **[2H2-1.1-4]** **(THPT TRẦN NHÂN TÔNG QUẢNG NINH-LẦN 1-2018)** Cắt một khối nón tròn xoay có bán kính đáy bằng R, đường sinh $2R$ bởi một mặt phẳng (α) qua tâm đáy và tạo với mặt đáy một góc 60^0 tính tỷ số thể tích của hai phần khối nón chia bởi mặt phẳng (α)?



A. $\dfrac{2}{\pi}$. **B.** $\dfrac{1}{2(\pi-1)}$. **C.** $\dfrac{2}{3\pi}$. **D.** $\dfrac{3\pi-4}{6\pi}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Không mất tính tổng quát ta giả sử $R=1$.

Khi cắt một khối nón tròn xoay có bán kính đáy bằng R, đường sinh $2R$ bởi một mặt phẳng (α) qua tâm đáy và tạo với mặt đáy một góc 60^0 thì ta được thiết diện là một đường parabol có đỉnh là gốc $O(0;0)$ và đỉnh còn lại là $A(1;1)$, do đó thiết diện sẽ có diện tích là $S=\frac{4}{3}$.

Xét mặt phẳng đi qua cạnh đáy của thiết diện vuông góc với hình tròn đáy của hình nón cắt hình nón làm đôi.

Gọi đa diện chứa mặt thiết diện đó là (H). Gọi (K) là đa diện chứa đỉnh O của hình nón được sinh bởi khi cắt thiết diện Parabol với đa diện (H).

Khi đó khoảng cách từ O đến mặt thiết diện là $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra thể tích của đa diện (K) là $V_K=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{4}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

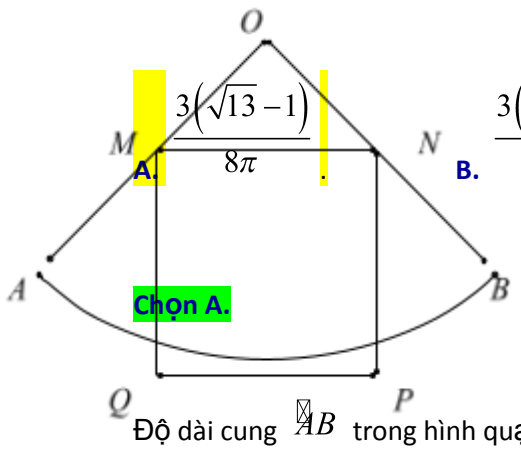
Mặt khác thể tích của nửa khối nón là $\frac{1}{2}\frac{1}{3}.\pi\sqrt{3}=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

Do đó thể tích của đa diện nhỏ tạo bởi thiết diện và khối nón là $V=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{(3\pi-4)\sqrt{3}}{18}$.

Vậy tỉ số thể tích của hai phần khối nón chia bởi mặt phẳng (α) là $\frac{\frac{(3\pi-4)\sqrt{3}}{18}}{\frac{\pi\sqrt{3}}{3}}=\frac{3\pi-4}{6\pi}$.

Câu 36. **[2H2-1.1-4] (Chuyên Bắc Ninh - L2 - 2018)** Cho tấm tôn hình nón có bán kính đáy là $r=\frac{2}{3}$, độ dài đường sinh $l=2$. Người ta cắt theo một đường sinh và trải phẳng ra được một hình quạt. Gọi M,

N thứ tự là trung điểm của OA, OB. Hỏi khi cắt hình quạt theo hình chữ nhật $MNPQ$ (hình vẽ) và tạo thành hình trụ đường PN trùng MQ (2 đáy làm riêng) thì được khối trụ có thể tích bằng bao nhiêu?



A. $\dfrac{3\left(\sqrt{13}-1\right)}{8\pi}$. **B.** $\dfrac{3\left(\sqrt{13}-1\right)}{4\pi}$. **C.** $\dfrac{5\left(\sqrt{13}-1\right)}{12\pi}$. **D.** $\dfrac{\pi\left(\sqrt{13}-1\right)}{9}$.

Chọn A.

Lời giải

Độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ trong hình quạt trên bằng chu vi đáy của hình nón và bằng $2\pi.\dfrac{2}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$.

Số đo góc $\widehat{AOB}$: $\widehat{AOB}=\dfrac{l_{AB}}{2\pi}=\dfrac{4\pi}{3.2\pi}=\dfrac{2\pi}{3}$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác OAB, ta được

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA.OB.\cos\widehat{AOB}=4+4-8.\cos\frac{2\pi}{3}=12.$$

Ta có $AB=2\sqrt{3}$ $AB=2\sqrt{3}\Rightarrow MN=\sqrt{3}$.

Ta có $\widehat{ONM}=30^\circ\Rightarrow\widehat{ONP}=120^\circ$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ONP, ta được

$$OP^2=ON^2+NP^2-2ON.NP.\cos\widehat{ONP}\Leftrightarrow 4=1+NP^2+NP$$

$$\Leftrightarrow NP^2+NP-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}NP=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\\ NP=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow NP=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}.$$

Khi đó hình chữ nhật $MNPQ$ được cuốn thành mặt trụ có chiều cao $NP=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$, bán kính đáy: $R=\dfrac{MN}{2\pi}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$.

Thể tích khối trụ: $V=h.\pi.R^2=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}.\pi.\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)^2=\dfrac{3\left(\sqrt{13}-1\right)}{8\pi}$.