CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES INGENIURS DU CONTROLE DE LA NAVIGATION AERIENNE

1. La condition de roulement sans glissement se traduit par :

$$\vec{v}(I) = \vec{v}(I) + \vec{\Omega} \wedge \vec{CI} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z \wedge \left(-a\vec{e}_y\right) = \left(\frac{dx}{dt} + a\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_x = \vec{0}$$

$$\frac{dx}{dt} + a\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow x + a\theta = cte \underset{\theta=0}{\overset{x=0}{=}} 0 \quad : \; x = -a\theta$$ réponse A)

2. En utilisant le théorème de Kœnig relatif à l'énergie cinétique,

$$E_c = \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}_{\text{mouvement du barycentre}} + \underbrace{\frac{1}{2}J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{\text{mouvement dans } R^*} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Réponse B)

3. $\vec{OA} = \vec{OC} + \vec{CA} = x\vec{e}_x + a\sin\theta\vec{e}_x - a\cos\theta\vec{e}_y = \left(x + a\sin\theta\right)\vec{e}_x - a\cos\theta\vec{e}_y$

En dérivant, $\vec{v}_A = \left(\frac{dx}{dt} + a\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_x + a\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_y$: Comme $\frac{dx}{dt} = -a\frac{d\theta}{dt}$

$\vec{v}_A = \left(1-\cos\theta\right)\frac{dx}{dt}\vec{e}_x - \sin\theta\frac{dx}{dt}\vec{e}_y$: Réponse A)

4. L'énergie cinétique est additive : $v_A^2 = \left(1-\cos\theta\right)^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

$$v_A^2 = \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\left(1-\cos\theta\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$E_c = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_A^2 = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + M\left(1-\cos\theta\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$: Réponse C)

5. La puissance d'une force est $P = \vec{f}.\vec{v} = M\vec{g}.\vec{v}_A = +Mg\sin\theta\frac{dx}{dt}$: Réponse D)

6. Si $\theta << 1,\ x << a$ et $E_c \approx m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + M\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \approx m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

En appliquant le théorème de la puissance cinétique, $\frac{dE_c}{dt} = P$ alors

$$\frac{dE_c}{dt} \approx m\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = +Mg\theta\frac{dx}{dt} = -\frac{Mgx}{a}\frac{dx}{dt}$$ soit $\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{Mg}{ma}}_{\omega_0^2}x = 0$: $\omega_0 = \sqrt{\frac{Mg}{ma}}$: :

Réponse A)

7. En écrivant la relation fondamentale suivant Ox, il vient

$$\frac{d}{dt}\left(M\left(1-\cos\theta\right)\frac{dx}{dt}+m\frac{dx}{dt}\right)=R_t\approx m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{Mg}{a}x$$

---

8. Nous avons $\underline{Y_2}=\frac{1}{R_2}+jC_2\omega=\frac{1+jR_2C_2\omega}{R_2}$ et $\underline{Y_1}=\frac{1}{R_1}+jC_1\omega=\frac{1+jR_1C_1\omega}{R_1}$.

Nous reconnaissons un diviseur de tension :

$$\underline{T}\left(j\omega\right)=\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}=\frac{\underline{Y_2}}{\underline{Y_1}+\underline{Y_2}}=\frac{1}{1+\underline{Y_1}/\underline{Y_2}}=\frac{1}{1+\frac{R_2}{R_1}\frac{1+jR_1C_1\omega}{1+jR_2C_2\omega}}$$

Alors $A=\frac{R_2}{R_1}$: Réponse A)

9. $\omega_1=1/R_1C_1$: Réponse B)

10. $\omega_2=1/R_2C_2$: Réponse D)

11. Le déphasage est nul si T est réel soit $\omega_2=\omega_1\Rightarrow R_1C_1=R_2C_2$: $C_2=\frac{R_1}{R_2}C_1$: Réponse C)

12. alors $v_s\left(t\right)=\frac{R_1}{R_1+R_2}V_e\cos\left(\omega t\right)$: Réponse A)

13. Nous avons $\frac{R_1}{R_1+R_2}=\frac{1}{10}$ alors $R_2=9R_1=9M\Omega$ et $C_2=\frac{R_1}{R_2}C_1=\frac{1}{9}nF$: Réponse D)

---

14. Ce sont les méthodes de Bessel Silbermann :

Posons $\overline{OA}=x$ et $\overline{OA'}=x'$ et $\overline{AA'}=x'-x=D$, distance entre l'écran et l'objet.

On a de plus, la formule de conjugaison au sommet : $\frac{1}{x'}-\frac{1}{x}=\frac{1}{f'}$

Alors, D étant fixe, on cherche les deux solutions en x vérifiant les conditions précédentes :

$\frac{1}{x+D}-\frac{1}{x}=\frac{1}{f'}$ soit $\frac{-D}{(x+D)x}=\frac{1}{f'}$: $Df'+(x+D)x=0$ soit $x^2+Dx+Df'=0$

Alors $\Delta=D^2-4Df'>0$: Il faut donc nécessairement que $D>4f'$

$D>4f'=D_0$: Réponse D)

15. Alors

$x_1=\frac{-D+\sqrt{D^2-4Df'}}{2}$ et $x_2=\frac{-D-\sqrt{D^2-4Df'}}{2}$ alors $d=x_1-x_2=\sqrt{D^2-4Df'}$

soit $d^2=D^2-4Df'$ soit $f'=\frac{D^2-d^2}{4D}=180mm$ Réponse A)

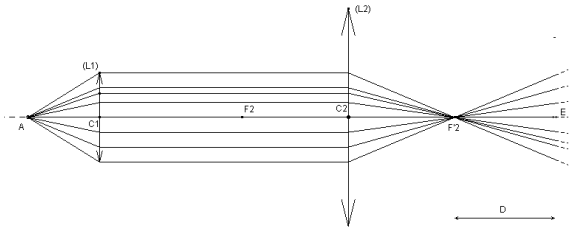
16. Le grandissement vaut : $G_1 = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{1,529}{-0,471} = -3,25$ ou avec le rapport inverse $G_2 = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -0,31$: Réponse B)

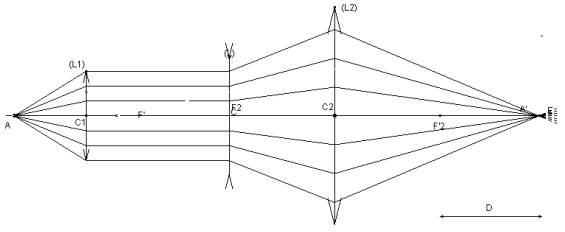
17. Si $G_1 = G_2 = -1$ alors d=0 : Réponse C)

18. Alors $D_0 = 4f' = 720\text{mm}$: Réponse B)

19. II n'existe aucune position de la lentille £′ pour laquelle l'image sur l'écran est nette : Réponse A)

20. C'est la méthode de Badal : $\overline{F_0A'} \cdot \overline{F_0'A''} = -f_0'^2 \Rightarrow \delta = \dfrac{f_0'^2}{-f_i'} \Rightarrow f_i' = \dfrac{f_0'^2}{-\delta}$: Réponse D)





---

21. $x = vt$: Réponse D)

22. $\phi = \iint_{surface} \vec{B}d\vec{s} \approx NB_0a^2 \cos\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda} - \omega_0 t\right)_{x=vt} = NB_0a^2 \cos\left(2\pi\dfrac{vt}{\lambda} - \omega_0 t\right)$

$\phi = \iint_{surface} \vec{B}d\vec{s} \approx NB_0a^2 \cos\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda} - \omega_0 t\right)_{x=vt} = NB_0a^2 \cos\left(\left(2\pi\dfrac{v}{\lambda} - \omega_0\right)t\right)$

Alors $\phi_0 = NB_0a^2$ et $\omega = 2\pi\dfrac{v}{\lambda}$: Réponse A)

23. $e = -\dfrac{d\phi}{dt} = \phi_0(\omega - \omega_0)\sin\left((\omega - \omega_0)t\right)$: Réponse C)

24. En appliquant la loi de maille, $L\dfrac{di}{dt} + Ri = e$ alors $(jL\omega + R)\underline{I} = \phi_0(\omega - \omega_0)$

$\underline{I} = \dfrac{\phi_0(\omega - \omega_0)}{jL(\omega - \omega_0) + R}$ et $I = \dfrac{\phi_0|\omega - \omega_0|}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}$ et $\tan(\psi_0) = -\dfrac{L(\omega - \omega_0)}{R}$ Réponse A)

25. En appliquant la loi de Laplace, $\vec{F} = \left(IaB\left(x + \dfrac{a}{2}\right) - IaB\left(x - \dfrac{a}{2}\right)\right)\vec{e}_x$

$\vec{F} = N\left(i(t)aB\left(x + \dfrac{a}{2}\right) - i(t)aB\left(x - \dfrac{a}{2}\right)\right)\vec{e}_x$ alors $\vec{F} = NIa^2\left(\dfrac{dB(x)}{dx}\right)\vec{e}_x$ soit

$\vec{F} = i(t) Na^2 \left(\frac{dB(x)}{dx} \right) \vec{e}_x = -i(t) \frac{2\pi Na^2 B_0}{\lambda} \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} - \omega_0 t \right) \vec{e}_x$

$\vec{F} = -I_0 \phi_0 \frac{2\pi}{\lambda} \sin\left((\omega - \omega_0)t + \psi_0 \right) \sin\left((\omega - \omega_0)t \right) \vec{e}_x$. Alors $F_0 = -I_0 \Phi_0 \frac{2\pi}{\lambda}$ Réponse D)

26.Comme

$\sin\left((\omega - \omega_0)t + \psi_0 \right) \sin\left((\omega - \omega_0)t \right) =$

$\sin^2\left((\omega - \omega_0)t \right) \cos(\psi_0) + \cos\left((\omega - \omega_0)t \right) \sin\left((\omega - \omega_0)t \right) \sin(\psi_0)$

$\left\langle \sin\left((\omega - \omega_0)t + \psi_0 \right) \sin\left((\omega - \omega_0)t \right) \right\rangle = \left\langle \sin^2\left((\omega - \omega_0)t \right) \right\rangle \cos(\psi_0) + 0 = \frac{1}{2} \cos(\psi_0)$

La valeur moyenne dans le temps est $\left\langle F(t) \right\rangle = -I_0 \phi_0 \frac{\pi}{\lambda} \cos(\psi_0)$: Réponse B)

27. avec $\cos(\psi_0) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 (\omega - \omega_0)^2}}$ Réponse C)

---

28. Le rendement d'une pompe à chaleur est $\eta = \frac{T_C(t)}{T_C(t) - T_0}$: réponse C)

29. Par définition $\eta = \frac{-\delta Q_c}{Pdt} = \frac{CdT_c}{Pdt} = \frac{T_C(t)}{T_C(t) - T_0}$. En séparant les variables,

$CdT_c \left(\frac{T_C(t) - T_0}{T_C(t)} \right) = Pdt$ soit $CdT_c \left(1 - \frac{T_0}{T_C(t)} \right) = Pdt$

$\int_{T_0}^{T_1} CdT_c \left(1 - \frac{T_0}{T_C(t)} \right) = P \int_0^{t_0} dt$: $C \left[(T_1 - T_0) - T_0 \ln\left(\frac{T_1}{T_0} \right) \right] = Pt_0$: réponse A)

30. Avec un radiateur $\eta = 1 = \frac{-\delta Q_c}{Pdt} = \frac{CdT_c}{Pdt}$ En séparant les variables,

$CdT_c = Pdt$ soit $\int_{T_0}^{T_1} CdT_c = P \int_0^{t_0} dt$: $C(T_1 - T_0) = Pt_1$: réponse D)

31. Le gain de temps $\Delta t = t_1 - t_0$ que l'on obtient en utilisant une pompe à chaleur plutôt qu'un radiateur électrique est $\Delta t = \frac{C}{P} \left[T_0 \ln\left(\frac{T_1}{T_0} \right) \right] = \frac{283}{98.10^{-6}} \ln\left(\frac{291}{283} \right) = 80,5.10^3 s$ réponse B)

32. Nous obtenons un transitoire thermique : $dH = CdT = \delta Q = -kC\left(T_c(t) - T_0 \right) dt$ alors

$\frac{dT}{dt} + k\left(T_c(t) - T_0 \right) = 0$ soit $T_c(t) = (T_c - T_0) \exp(-kt) + T_0$ alors

$k = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{T_c - T_0}{T_c(t) - T_0}\right) = \frac{1}{3600}\ln\left(\frac{5}{4}\right) = 0,2.10^{-4}\,s$: réponse D)

33. En appliquant le 1er principe à la pièce,

$$CdT_c = -kC(T - T_0)dt + \eta P dt = -kC(T - T_0)dt + \frac{T_C(t)}{T_C(t) - T_0}Pdt$$

.

En régime permanent, $dT_c = 0$ et $\frac{kC}{P}(T_\ell - T_0) = \frac{T_\ell}{T_\ell - T_0}$ soit

$(T_\ell - T_0)^2 = T_\ell \frac{P}{kC} = T_\ell^2 + T_0^2 - 2T_\ell T_0$ soit $T_\ell^2 + T_0^2 - 2T_\ell\left(T_0 + \frac{P}{2kC}\right) = 0$

$A = T_0 + \frac{P}{2kC}$: Réponse B)

34. Avec un radiateur $CdT_c = -kC(T - T_0)dt + Pdt$ alors en régime permanent, $dT_c = 0$ et $\frac{kC}{P}(T_{\ell 2} - T_0) = 1$ soit $T_{\ell 2} = \frac{P}{kC} + T_0 = 288K$: Réponse A)

---

35. La loi des nœuds en termes de potentiels donne :

$V_A = \frac{\underline{Y}.\underline{V}_e + \underline{Y}.\underline{V}_s}{3\underline{Y} + \underline{Y}_2}$ et $V_B = 0 = \frac{\underline{Y}.\underline{V}_A + \underline{Y}_1.\underline{V}_s}{\underline{Y} + \underline{Y}_1}$ alors $V_A = \frac{\underline{Y}.\underline{V}_e + \underline{Y}.\underline{V}_s}{3\underline{Y} + \underline{Y}_2} = -\frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}}\underline{V}_s$

$(\underline{Y}.\underline{V}_e + \underline{Y}.\underline{V}_s)\underline{Y} = -\underline{Y}_1(3\underline{Y} + \underline{Y}_2)\underline{V}_s$ ou $\underline{Y}\underline{Y}.\underline{V}_e = -\underline{V}_s\left(3\underline{Y}\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1\underline{Y}_2 + \underline{Y}\underline{Y}\right)$

$\underline{T} = \frac{\underline{V}_e}{\underline{V}_s} = -\frac{\underline{Y}\underline{Y}}{3\underline{Y}\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1\underline{Y}_2 + \underline{Y}\underline{Y}} = -\frac{1}{1 + 3\frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}} + \frac{\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{\underline{Y}^2}}$: Réponse A)

36. $\underline{Y} = jC\omega$; $\underline{Y}_1 = \frac{1}{R}$ et $\underline{Y}_2 = \frac{\alpha}{R}$: $\underline{T} = -\frac{1}{1 + 3\frac{1}{jRC\omega} + \frac{\alpha}{(jRC\omega)^2}}$

$\underline{T} = -\frac{1}{1 - 3jx + \alpha x^2} = \frac{1}{1 - \alpha x^2 - 3jx}$. En module , $T = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha x^2) + 9x^2}}$: Réponse C)

37. $T = \frac{1}{\sqrt{1 + (9 - 2\alpha)x^2 + (\alpha^2 x^4)}}$ alors $\alpha = 9/2$: réponse A)

38. Par identification : $\sqrt{\alpha}x = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega_1}{\omega}$: $\omega_1 = \frac{3\omega_0}{\sqrt{2}}$: Réponse D)

39. $\underline{T} = -\frac{1}{1 - 3jx + \alpha x^2} = -\frac{1}{1 - \frac{9x^2}{2} - 3jx} = -\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 - \sqrt{2}j\frac{\omega_1}{\omega}}$ donc

$\tan(\varphi)=\dfrac{\sqrt{2}\dfrac{\omega_1}{\omega}}{1-\left(\dfrac{\omega_1}{\omega}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{\omega}{\omega_1}-\dfrac{\omega_1}{\omega}}$; Réponse B)		
40. la valeur ω_2 de la pulsation correspondant à une atténuation de la fonction de transfert de 40 dB par rapport à $T(\infty)$ vérifie $T=1/2$ alors $4=1+\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^4 \Rightarrow \dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\sqrt[4]{3}$ $\omega_2=\dfrac{3\omega_0}{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}$		