

Câu 28: [2H2-2.1-4] (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018) Cho mặt cầu (S) tâm O và các điểm A, B, C nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AB = 3, AC = 4, BC = 5$ và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng 1. Thể tích của khối cầu (S) bằng

A. $\frac{7\sqrt{21}\pi}{2}$.

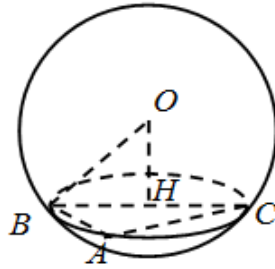
B. ABD .

C. $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$.

D. $\frac{29\sqrt{29}\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A .

Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên H là trung điểm của BC .

Vì khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng 1 nên $OH = 1$.

$\triangle OHB$ vuông tại H có: $OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Vậy mặt cầu (S) có bán kính $R = OB = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Do đó thể tích khối cầu (S) là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^3 = \frac{29\sqrt{29}\pi}{6}$.

Câu 49: [2H2-2.1-4] (ĐẶNG THỪA HÚC NGHỆ AN-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;2), B(2;-2;0)$. Gọi $I_1(1;1;-1)$ và $I_2(3;1;1)$ là tâm của hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có chung một dây cung AB . Biết rằng luôn có một mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn ấy. Tính bán kính R của (S) .

A. $R = \frac{\sqrt{219}}{3}$.

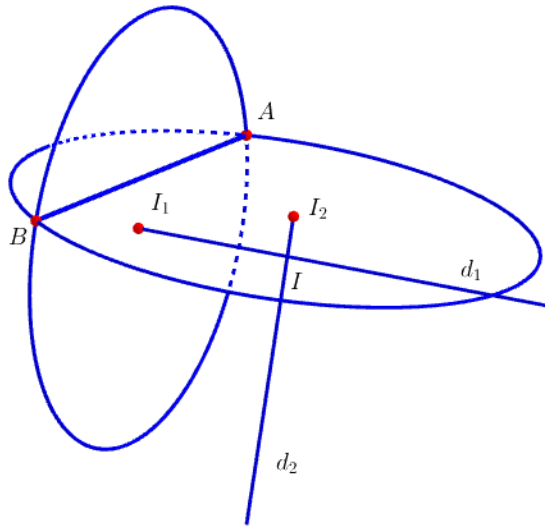
B. $R = 2\sqrt{2}$.

C. $R = \frac{\sqrt{129}}{3}$.

D. $R = 2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi d_1 là đường thẳng đi qua I_1 và vuông góc với mặt phẳng (I_1AB) , khi đó d_1 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn tâm I_1 ; d_2 là đường thẳng đi qua I_2 và vuông góc với mặt phẳng (I_2AB) , khi đó d_2 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn tâm I_2 . Do đó, mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn tâm (I_1) và (I_2) có tâm I là giao điểm của d_1 và d_2 và bán kính $R = IA$

Ta có $\overrightarrow{I_1A} = (-1; 1; 3)$, $\overrightarrow{I_1B} = (1; -3; 1)$. Đường thẳng d_1 có véc-tơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{I_1A}; \overrightarrow{I_1B}] = (10; 4; 2) = 2(5; 2; 1)$.

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng d_1 là:

Ta có $\overrightarrow{I_2A} = (-3; 1; 1)$, $\overrightarrow{I_2B} = (-1; -3; -1)$. Đường thẳng d_2 có véc-tơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{I_2A}; \overrightarrow{I_2B}] = (2; -4; 10) = 2(1; -2; 5)$.

$$d_2 : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 1 - 2s \\ z = 1 + 5s \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng d_2 là:

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} 1 + 5t = 3 + s \\ 1 + 2t = 1 - 2s \\ -1 + t = 1 + 5s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ s = -\frac{1}{3} \end{cases}$$
 . Suy ra $I = \left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = \sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(2 + \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{129}}{3}$.