

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

OPTION A

EXERCICE :

1. Montrer que la fonction $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$ est constante sur $\mathbf{R}$. Que vaut cette constante ?

En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, utile pour la suite.

2. Pour $a > 0$ et $b \geq 0$ on pose : $I(a, b) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2 u^2 - \frac{b^2}{u^2}} du$.

Au moyen de 1., calculer $I(a, 0)$.

Justifier l'existence de l'intégrale $I(a, b)$ pour $a > 0$ et $b \geq 0$.

3. Etablir : $I(a, b) = \frac{1}{a} I(1, ab)$, puis pour $b > 0$:

$$\frac{\partial I}{\partial b}(a, b) = -2b I(b, a).$$

4. Quelle équation différentielle du 1^{er} ordre est vérifiée par la fonction $b \rightarrow I(a, b)$ sur $\mathbf{R}^{*+}$?

En déduire la valeur de $I(a, b)$.

PROBLÈME :

On utilise les conventions usuelles d'écriture du calcul matriciel.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Un vecteur x de $\mathbf{R}^n$ est spontanément écrit en colonne. Si on veut l'écrire en ligne, on écrit $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. De sorte que si y est un autre vecteur de $\mathbf{R}^n$: $x^T y = y^T x$ désigne le produit scalaire usuel de x par y .

Pour un vecteur fixe g de $\mathbf{R}^n$, et B une matrice symétrique fixe $n \times n$, on définit la fonction m de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$m(p) = g^T p + \frac{1}{2} p^T B p.$$

Le but du problème est l'étude du minimum (éventuel) de m sur les boules $\|p\| = \sqrt{p^T p} \leq \alpha$ (où $0 \leq \alpha \leq +\infty$).

- I - 1. Montrer que si g appartient à $\text{Im}(B)$ et que B est semi définie positive (c'est-à-dire $p^T B p \geq 0$ pour tout p de $\mathbf{R}^n$) m possède un minimum (global) sur $\mathbf{R}^n$. Indication : calculer $m(-p+w) - m(-p)$ lorsque p vérifie $Bp = g$ et w est quelconque dans $\mathbf{R}^n$.
2. En utilisant des coordonnées pour le vecteur g et la matrice B , calculer le gradient $\nabla m(p)$ de m en p .

3. En déduire, réciproquement, que si m possède un minimum (global) sur $\mathbf{R}^n : g$ appartient à $\text{Im}(B)$ et B est semi définie positive.
4. Si B est définie (strictement) positive (c'est-à-dire $p^T B p > 0$ pour tout $p \neq 0$) montrer qu'il existe un unique vecteur p^* de $\mathbf{R}^n$ en lequel m admet un minimum (global) strict.
5. B étant une matrice symétrique quelconque, montrer que p réalise le minimum (global) de m sur $\mathbf{R}^n$, si et seulement si $m(p)$ est un minimum local de m .

II - EXEMPLE

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}$$

On prend $n=3$ et

1. A quelle condition (sur α et β) B est-elle semi définie positive ? définie (strictement) positive ?
2. On suppose que la 1^{ère} condition est réalisée, mais pas la seconde.

$$g = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha + \beta \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 2.1 On prend

Montrer que m possède un minimum global obtenu sur une droite. Trouver l'équation de cette droite.

- 2.2 Trouver un vecteur g de $\mathbf{R}^3$ pour lequel $\inf_{p \in \mathbf{R}^3} m(p) = -\infty$.

III - On suppose maintenant (et dans toute la suite) que B est une matrice symétrique définie (strictement) positive et on s'intéresse au problème de trouver les vecteurs p réalisant le minimum de $m(p)$ sur la boule euclidienne $\|p\| \leq \alpha$ ($\alpha > 0$).

1. Pour $p \neq q$ (deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$) montrer que l'on a :

$$(p - q)^T \nabla m(q) < m(p) - m(q)$$

En déduire que la fonction $p \rightarrow m(p)$ est strictement convexe : c'est-à-dire vérifie pour $p \neq q$ et $t \in]0, 1[$:

$$m(tp + (1-t)q) < tm(p) + (1-t)m(q)$$

2. Justifier l'existence d'un unique vecteur p (que l'on notera $p = p(\alpha)$) réalisant le minimum de m sur la boule de centre 0 et de rayon α .
3. Montrer qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$: $p(\alpha)$ est constant (on notera ce p : p^*). Pour $0 < \alpha < \alpha_0$ montrer que $p(\alpha)$ est situé sur la sphère de centre 0 et de rayon α .

- 4.1 En considérant la fonction

$$y_t(p) = m(p(\alpha) + t(p - p(\alpha))) - m(p(\alpha)) \quad t \in [0, 1]$$

Etablir pour $\alpha \in]0, \alpha_0[$ la relation

$$(p - p(\alpha))^T \nabla m(p(\alpha)) \geq 0 \text{ pour tout } p \text{ vérifiant } \|p\| \leq \alpha$$

- 4.2 En déduire par un raisonnement géométrique (sans utiliser de calcul) que

$$\nabla m(p(\alpha)) = -\lambda_\alpha \cdot p(\alpha)$$

où λ_α est un scalaire ≥ 0 .

5. Réciproquement, toujours pour $\alpha \in]0, \alpha_0[$, montrer que si $\bar{p}$ vérifie $\|\bar{p}\| = \alpha$ et $\nabla m(\bar{p}) = -\lambda \bar{p}$ (avec $\lambda \geq 0$) on obtient nécessairement : $\bar{p} = p(\alpha)$.

Indication : Utiliser (après l'avoir justifié) le fait que $\bar{p}$ réalise le minimum (global) sur $\mathbf{R}^n$ de la fonction :

$$p \rightarrow \tilde{m}(p) = g^T p + \frac{1}{2} p^T (B + \lambda I) p$$

IV - EXEMPLE

$$g = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

On prend

1. Montrer que B est définie (strictement) positive.
2. Déterminer p^* .
3. Déterminer la courbe $\alpha \rightarrow p(\alpha)$, (du moins une paramétrisation) pour $\alpha \geq 0$.
