

Sources en mouvement et « murs d'ondes » ...**PROBLEME A : LE MUR DE LA CATENAIRE**

A.1 - Les angles d'inclinaison α restant très petits (il aurait été souhaitable que cette hypothèse de l'énoncé soit présente dès le A.1, et non pas simplement en A.2) leur cosinus est assimilable à 1 (à l'ordre 1 en α). La masse dm du morceau de câble GD est donc $dm = \mu dx$.

Il est légitime de supposer le câble quasi-inextensible et le mouvement de GD proche d'une translation parallèle à Oy.

A.2 - On applique le théorème de la résultante dynamique à la portion de câble GD, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

La projection selon Ox donne : $0 = - \|\vec{T}(x, t)\| \cos \cos(\alpha(x, t)) + \|\vec{T}(x + dx, t)\| \cos \cos(\alpha(x + dx, t))$ (1)

La projection selon Oy donne : $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = - \|\vec{T}(x, t)\| \sin \sin(\alpha(x, t)) + \|\vec{T}(x + dx, t)\| \sin \sin(\alpha(x + dx, t))$ (2)

A l'ordre 1 en α , (1) donne $\|\vec{T}(x, t)\| = \|\vec{T}(x + dx, t)\|$. A chaque instant, la tension dans la corde est la même tout le long de celle-ci. Cette tension est T_0 indiquée dans le préambule de la question A.1, ce qui donne bien $\|\vec{T}(x, t)\| = \|\vec{T}(x + dx, t)\| = T_0$.

A l'ordre 1 en α , (2) donne $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = - T_0 \alpha(x, t) + T_0 \alpha(x + dx, t)$, d'où $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t)$. **Notons que (x,t) manque dans le terme de gauche de l'énoncé.**

A.3 - En assimilant le petit angle α à sa tangente et donc au coefficient directeur de la tangente à la courbe décrite par la corde, on peut écrire $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$, d'où $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$, ce qui est bien de la forme $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, avec $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

v représente la célérité de l'onde. Son unité est $\sqrt{\frac{kg.m.s^{-2}}{kg.m^{-1}}}$, ce qui donne bien des m/s.

A.4 - En écrivant la condition d'équilibre d'une masse M , on montre aisément que la tension T_0 dans la caténaire est $T_0 = Mg$.

A.5 - Les poulies étant sans frottement, la norme de la tension T_i du fil est la même tout le long de celui-ci (on le montre en appliquant le théorème du moment dynamique à chaque poulie et en exploitant le fait que les fils sont sans masse).

En appliquant le théorème de la résultante dynamique à la masse M , puis en projetant selon la verticale ascendante : $-Mg + T_i = 0$. En appliquant la même loi à l'ensemble constitué de la poulie 2, de la tige et de la masse K , $-Kg + 2T_i = 0$.

Il vient $K = 2M$.

Remarque : on peut retrouver ceci par un raisonnement énergétique : si M monte de h , K monte de $h/2$.

Le "facteur de démultiplication" n'est pas défini, mais on peut penser qu'il s'agit du rapport K/M , qui vaut ici 2.

A.6 - Toujours en considérant que la norme de la tension (notée ici T_2) est la même tout le long du fil, on peut écrire que la tige du bas et les 3 poulies associées sont soumises à une force verticale ascendante $6T_2$. Le rapport de démultiplication vaut donc 6 ici.

A.7 - Notons ρ la masse volumique du cuivre et S la section de la caténaire. La masse linéique est $\mu = \rho S$. L'application numérique donne $\mu = 1,3 \text{ kg/m}$. La célérité des ondes transverses est $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ d'où $v = 140 \frac{m}{s} = 502 \text{ km/h}$.

A.8 - Pour « repousser le mur de la caténaire », il faut augmenter la tension T_0 ou bien diminuer la masse linéique de la caténaire. La plus simple à mettre en œuvre est d'augmenter la tension grâce à un palan.

A.9 - Notons v_{record} la vitesse du record. La célérité des ondes transverses doit être au moins $v_{\text{min}} = v_{\text{record}}/0,97$. Il faut donc une tension minimale $T_{\text{min}} = \mu v_{\text{min}}^2 = \mu v_{\text{record}}^2 / 0,97^2 = 36 \text{ kN}$. Par rapport à la tension standard de 26 kN, il faut donc ajouter 10 kN. Mais grâce au palan, il suffit d'un ajout de $10/6 \text{ kN}$, donc une masse de $10^3/6$, soit 167 kg, si on prend $g = 10 \text{ m/s}^2$.

PROBLEME B : CÔNE DE MACH

B.1- La masse molaire moyenne de l'air est $M = 0,2M_{O_2} + 0,8M_{N_2} = 29 \text{ g/mol}$ (avec 2 chiffres significatifs).

B.2- La célérité du son est donc en $K^a \cdot (\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1})^b \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})^d$. Pour obtenir une célérité en m/s, il faut donc que :

$$a - d = 0$$

$$b + d = 0$$

$$2d = 1$$

Il vient donc $a = d = -b = 0,5$. Ainsi, une formule possible est $c = \sqrt{\frac{RT}{M}}$

B.3- Le coefficient 1,4 correspond au rapport $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ des capacités calorifiques à pression et volume constants.

Sa valeur est 1,4 pour un gaz diatomique car aux températures usuelles, l'énergie interne d'un gaz parfait diatomique est approximativement $U = \frac{5}{2}nRT$ en raison des 5 degrés de liberté (3 de translation et 2 de rotation).

L'enthalpie est $H = U + PV = \frac{7}{2}nRT$. Ainsi, $\gamma = \frac{7}{5}$

Remarque : la justification de la valeur de $\gamma = 1,4$ est hors-programme.

B.4- La célérité du son à -20°C est donc $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ km/h}$

B.5- L'avion qui vole à *mach* 2 a une vitesse $v_a = 2,4 \cdot 10^3 \text{ km/h}$

B.6- Les ondes sonores émises par l'avion supposé ponctuel sont des ondes sphériques.

B.7- A l'instant $-\tau$, l'avion se trouvait en $x_\tau = -v\tau$. A l'instant $t > 0$, le rayon de la surface d'onde sonore émise à $-\tau$ est :

$$R(\tau, t) = c(t + \tau)$$

B.8- L'équation que l'on nous demande n'est pas cartésienne puisque l'on se place en coordonnées cylindriques. Dans tout plan $\theta = Cte$, on a un cercle de centre x_τ et de rayon $R(\tau, t)$, d'où $(x - x_\tau)^2 + \rho^2 = R^2(\tau, t)$ et $\rho = \sqrt{c^2(t + \tau)^2 - (x + v\tau)^2}$.

B.9- La condition (2) de l'énoncé donne : $2c^2(t + \tau) - 2v(x + v\tau) = 0$, d'où $c^2t - vx = (v^2 - c^2)\tau$ et $\tau = \frac{c^2t - vx}{v^2 - c^2}$.

$$\text{En remplaçant dans l'expression de } \rho, \text{ il vient : } \rho = \sqrt{c^2 \left(\frac{tv^2 - xv}{v^2 - c^2} \right)^2 - \left(\frac{vc^2t - xc^2}{v^2 - c^2} \right)^2} = \frac{\sqrt{c^2 v^2 (tv - x)^2 - c^4 (tv - x)^2}}{v^2 - c^2},$$

$$\text{Ou encore : } \rho = \frac{c(tv - x)\sqrt{v^2 - c^2}}{v^2 - c^2} \text{ puis } \rho = \frac{c(tv - x)}{\sqrt{v^2 - c^2}}, \text{ ce qui est bien de la forme } \rho = \psi \cdot (vt - x), \text{ avec } \psi = \frac{c}{\sqrt{v^2 - c^2}}.$$

B.10- Soit le triangle ABC où A est le point où se trouve l'avion à $-\tau$, B le point où il se trouve à t , et C un point du cône se trouvant sur la sphère de centre A et de rayon $R(\tau, t)$. Ce triangle est rectangle en C, puisque la sphère y est tangente au cône.

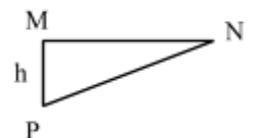
$$\text{On a donc : } \sin \beta = \frac{AC}{AB} = \frac{c(t + \tau)}{v(t + \tau)} \text{ donc } \sin \beta = \frac{c}{v}.$$

$$\text{Remarque : on peut aussi écrire que } \tan \beta = \psi = \frac{c}{\sqrt{v^2 - c^2}}$$

B.11- Avec les valeurs numériques de B.5 (et non B.4 !), on a $\beta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

B.12- Lorsque l'avion est au-dessus de la tête de P, il est en M. Lorsque P entend le bang, l'avion est en N. On a donc $MN = v \Delta t$. L'angle en N du triangle est β , d'où $\tan \beta = \frac{h}{v \Delta t}$

$$\text{Il vient } \Delta t = \frac{h}{v \tan \beta}, \text{ ou encore } \Delta t = \frac{h \sqrt{v^2 - c^2}}{vc}.$$



PROBLEME C : LE SILLAGE DE LORD KELVIN

C.1- Le terme $(\vec{v} \cdot \vec{grad})\vec{v}$ est négligeable devant le terme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ si la norme du champ des vitesses reste petite devant la célérité (vitesse de phase) des ondes. En effet, le premier terme a pour ordre de grandeur v^2/L , où L est une longueur caractéristique de l'onde ; et le second a pour ordre de grandeur v/T , T étant une durée caractéristique de l'onde.

C.2- Lorsque le fluide est à l'équilibre, l'équation d'Euler devient $\vec{grad}P_e = \rho \vec{g}$; on en déduit que la pression P_e à l'équilibre ne dépend que de z et $dP_e/dz = -\rho g$. En intégrant : $P_e = P_0 - \rho g z$ (pour $z < 0$).

C.3- L'équation d'Euler simplifiée en C.1 s'écrit : $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{grad}P + \rho \vec{g}$.

L'équation de l'équilibre est $\vec{0} = -\vec{grad}P_e + \rho \vec{g}$

Par différence, en posant $\tilde{p}(x, z, t) = P(x, z, t) - P_e(z)$, et en passant en notation complexe, il vient bien : $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{grad}\tilde{p}$

En projetant cette dernière équation, on obtient :

$$\rho j \omega v_x(z) e^{j(\omega t - kx)} = j k f(z) e^{j(\omega t - kx)} \quad (3)$$

$$\rho j \omega v_z(z) e^{j(\omega t - kx)} = -\frac{df}{dz}(z) e^{j(\omega t - kx)} \quad (4)$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit ici $\text{div} \vec{v} = 0$ puisque le fluide est incompressible, donc en écoulement incompressible. Cela donne :

$$-j k v_x(z) e^{j(\omega t - kx)} + \frac{dv_z}{dz}(z) e^{j(\omega t - kx)} = 0 \quad (5)$$

Après simplification, ces équations deviennent :

$$\rho \omega v_x(z) = k f(z) \quad (3')$$

$$\rho j \omega v_z(z) = -\frac{df}{dz}(z) \quad (4')$$

$$-j k v_x(z) + \frac{dv_z}{dz}(z) = 0 \quad (5')$$

En dérivant (4') par rapport à z puis en utilisant les deux autres équations, il vient :

$$\frac{d^2 f}{dz^2}(z) = -\rho j \omega j k \frac{k}{\rho \omega} f(z), \text{ c'est-à-dire } \frac{d^2 f}{dz^2}(z) = k^2 f(z), \text{ ce qui est de la forme donnée en posant } \beta = k.$$

C.4- La résolution de l'équation différentielle du second ordre précédente donne $f(z) = A e^{kz} + B e^{-kz}$. Et puisque l'eau est très profonde, il faut poser $B = 0$ pour que la pression ne diverge pas. En posant $A = p_1$, il vient :

$$\tilde{p} = p_1 e^{kz} e^{j(\omega t - kx)}, \text{ et en prenant la partie réelle : } \tilde{p} = p_1 e^{kz} \cos(\omega t - kx)$$

C.5- D'après C.2 et C.3, on a $\tilde{p}(x, z, t) = P(x, z, t) - P_0 + \rho g z$. Pour $z = \xi(x, t)$, $P = P_0$.

On peut donc écrire : $p_1 e^{k\xi(x,t)} \cos(\omega t - kx) = \rho g \xi(x, t)$, et en remplaçant $\xi(x, t)$ par $a \cos(\omega t - kx)$:

$$p_1 e^{k a \cos(\omega t - kx)} \cos(\omega t - kx) = \rho g a \cos(\omega t - kx).$$

Ceci étant vrai pour tout t et tout x , $p_1 e^{k a \cos(\omega t - kx)} = \rho g a$.

Pour des ondes de petite amplitude, $ka \ll 1$ et $e^{k a \cos(\omega t - kx)} \simeq 1$, ce qui donne bien $p_1 = \rho g a$

C.6- En reprenant l'équation (4'), on peut écrire : $v_z(z) = -\frac{1}{j\rho\omega} \frac{df}{dz}(z) = -\frac{1}{j\rho\omega} k p_1 e^{kz}$ puis $\underline{v}_z = -\frac{1}{j\rho\omega} k p_1 e^{kz} e^{j(\omega t - kx)}$.

Ceci est bien de la forme $\underline{v_z} = -\frac{1}{j\rho\omega}h(z)e^{j(\omega t - kz)}$, en posant $h(z) = kp_1 e^{kz} = k\rho g a e^{kz}$

C.7- A l'interface eau-air, $\underline{v_z} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, d'où $-\frac{1}{j\rho\omega}k\rho g a e^{kz} e^{j(\omega t - kz)} = j\omega a e^{j(\omega t - kz)}$, puis $\frac{1}{\omega}k g e^{kz} = \omega$.

Dans cette expression, $z = \xi$, et comme en C.5, $e^{k a \cos(\omega t - kx)} \simeq 1$. Finalement, $kg = \omega^2$ et $\omega = (kg)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

C.8- ω est en s^{-1} , g est en $m.s^{-2}$, k est en m^{-1} donc kg est en s^{-2} , ce qui valide $\alpha = \frac{1}{2}$.

C.9- La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$. La vitesse de groupe est $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k}}$. On remarque que $v_g = \frac{1}{2}v_\varphi$

Notons au passage que la vitesse de phase, exprimée en fonction de la pulsation, a pour expression $v_\varphi = \frac{g}{\omega}$. Elle est très grande en basse fréquence.

C.10- Bien que la figure 6 corresponde au sillage d'un pétrolier, nous y ferons la mesure de l'angle, puisque celui-ci est a priori le même pour le canard et le pétrolier.

Au rapporteur, on mesure l'angle du V, que l'on notera α , conformément à la figure 9 : $\alpha = 34,5^\circ$. En prenant un triangle isocèle s'appuyant sur les traits noirs épais, on peut choisir les deux côtés égaux de longueur 9,5 cm. Le troisième mesure alors 5,6 cm.

$$\alpha = 2 \frac{2,8}{9,5} = 34,3^\circ$$

C.11- Dans le référentiel du canard, le sillage est stationnaire, comme l'écoulement.

C.12- L'onde, ici monochromatique, se propage de A à M pendant une durée $t - \tau$, à la célérité v_φ , d'où $\vec{AM} = v_\varphi (t - \tau) \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$.

De plus, $\vec{k} \cdot \vec{AB} = \vec{k} \cdot \vec{v}(t - \tau) = \omega(t - \tau) = \|\vec{k}\|v_\varphi (t - \tau)$. En tirant v_φ de cette relation et en reportant dans l'expression du vecteur $\vec{AM}$, on tombe bien sur la relation de l'énoncé $\vec{AM} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{k}\|^2} \vec{k}$.

Cette relation montre que M est le projeté orthogonal de B sur la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{k}$. Le triangle AMB étant rectangle en M, l'ensemble des points M qui vérifient la relation vectorielle forment un cercle de diamètre AB. Les différents points du cercle sont obtenus pour différentes pulsations. Notons au passage que la relation admise $= \vec{k} \cdot \vec{v}$, entraîne que le point B soit atteint pour $v_\varphi = v$. Pour le point A, c'est un peu moins simple. On pourrait penser que, puisque $\vec{k}$ devient orthogonal à $\vec{v}$, ω tend vers 0. En réalité, k et ω tendent vers $+\infty$. En effet, quand M se rapproche de A, $\omega = k \cdot v \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{v})$ devient de plus en plus inférieur à $k \cdot v$, donc la vitesse de phase v_φ devient de plus en plus petite par rapport à v . Or, $v_\varphi = \frac{g}{\omega}$, donc ω devient de plus en plus grand.

C.13- La vaguelette étant un paquet d'onde, son maximum se propage à la vitesse de groupe.

Si on s'appuie sur la question précédente et qu'on utilise la relation $v_g = \frac{1}{2}v_\varphi$, on est bien tenté de dire que l'ensemble des points N sera similaire à l'ensemble des points M, donc un cercle Γ_τ passant par A mais de rayon moitié du précédent ...

C.14- Le cercle Γ_τ passe par A et a pour diamètre AB/2, donc pour rayon AB/4, soit $R_\tau = v(t - \tau)/4$. Si le canard est à l'abscisse vt (point B) à l'instant t , c'est que le point A est à l'abscisse $v\tau$. Le centre du cercle Γ_τ a par conséquent son centre à l'abscisse $x_\tau = v\tau + v(t - \tau)/4$, soit $x_\tau = vt/4 + 3v\tau/4$.

Notons au passage que **le dessin ne respecte pas les distances** : AB ne représente pas le double du diamètre du cercle passant par A.

C.15- Soit C_τ le centre du cercle Γ_τ et M_τ le point du cercle tangent au cône de sommet B. Dans le triangle $C_\tau M_\tau B$, rectangle en M_τ , on a : $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R_\tau}{C_\tau B} = \frac{v(t-\tau)/4}{3v(t-\tau)/4} = \frac{1}{3}$, ce qui est bien de la forme souhaitée en posant $P = 3$.

L'application numérique donne $\alpha = 2 \frac{1}{3} = 0,68 \text{ rad} = 39^\circ$. L'ordre de grandeur est le même qu'en C.10.

PROBLEME D : EFFET DOPPLER

D.1- On obtient un faisceau de lumière en plaçant dans l'ordre : la lampe, un diaphragme, puis une lentille convergente en faisant en sorte que le diaphragme soit confondu avec son foyer objet. On peut ajouter un condenseur avant le diaphragme.

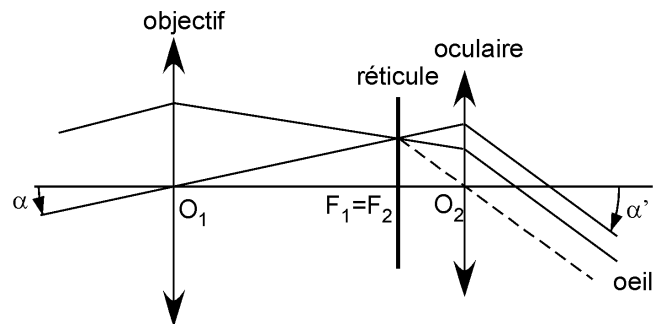
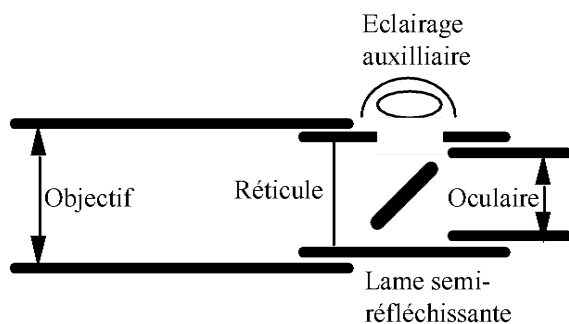


Schéma : cf ci-contre

D.2- Le dispositif expérimental sur lequel on pose le réseau est un goniomètre.

D.3- Le faisceau de lumière diffracté par le réseau s'observe à l'aide d'une lunette de visée à l'infini. C'est un système afocal constitué de deux lentilles convergentes. Le foyer image de la première est confondu avec le foyer objet de la seconde.

Schéma de la lunette :

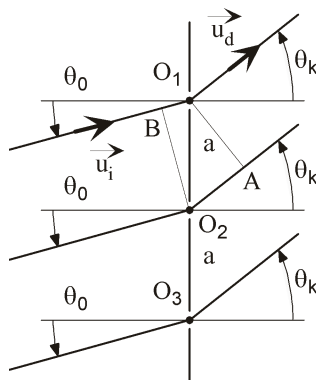


D.4- Le grossissement angulaire est $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1}{f_2}$.

D.5- On lit $5^\circ 34'$.

D.6- L'énoncé manque de précision : l'angle θ_k n'est pas défini. Il y a tout lieu de penser qu'il s'agit de l'angle orienté entre le rayon émergent et la normale. Sur le schéma ci-dessous, on fait apparaître la différence de marche $a(\sin \sin \theta_k - \sin \sin \theta_0)$ entre les rayons passant par deux fentes successives. On obtient un pic d'éclairement quand cette différence de marche est un multiple entier de λ . La relation fondamentale des réseaux s'écrit :

$$\sin \sin \theta_k - \sin \sin \theta_0 = k \frac{\lambda}{a}.$$



D.7- La déviation est $D_k = \theta_k - \theta_0$.

D.8- A l'ordre 1 en v/c , $\lambda_r = \lambda_e (1 + v/c)$ et $\delta = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{v}{c}$.

D.9- Les couleurs sont données dans le tableau :

λ (nm)	656,3	486,1	434,0	410,2
couleur	Rouge	Bleu	Violet	violet

D.10- Les valeurs numériques donnent ici $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{486,1}{0,01}$. Dans l'ordre $k = 1$, il faut donc que soient éclairés $N = 49.10^3$ traits.

La vitesse de la nébuleuse par rapport à nous est $v = c \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} = 6,2.10^3 m/s$