

Techniques de contrôle non destructif

PREMIERE PARTIE : Courants de Foucault dans une plaque métallique

A / Propagation d'une onde dans un demi-espace infini métallique

A.1-
$$\vec{J}(M, t) = \sigma \vec{E}(M, t)$$

A.2- Une solution $\vec{H}(M, t) = H(M, t) \vec{u}_z$ convient car elle est compatible avec la condition de continuité du champ $\vec{H}$ à l'interface air/métal, continuité due à l'absence de courants surfaciques.

Du fait de l'invariance de la source d'excitation par toute translation selon $\vec{u}_y$ ou $\vec{u}_z$, $\vec{H}$ l'est également. Il vient $H(M, t) = H(x, t)$

A.3-
$$\vec{J}(M, t) = \text{rot} \vec{H}(M, t) \quad (1), \text{ d'où } \vec{J}(M, t) = J \vec{u}_y, \text{ avec } J = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

Je ne vois pas bien ce que l'on attend ici à propos de la loi de Lenz et de l'équation de Maxwell-Ampère.

A.4-
$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{entraîne} \quad \text{rot} \vec{J} = -\sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2).$$

Les équations (1) et (2) donnent
$$\text{grad}(\text{div} \vec{H}) - \Delta \vec{H} = -\sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad \text{Or,} \quad \text{div} \vec{H} = \text{div} \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \text{div} \vec{B} = 0,$$

d'où
$$\Delta H = \sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial H}{\partial t}. \quad \text{Et de même, en prenant le rotationnel du rotationnel de } \vec{J}, \text{ on obtient } \Delta \vec{J} = \sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}.$$

Ces deux équations aux dérivées partielles sont des équations de diffusion.

A.5- Les équations de Maxwell étant linéaires, les champs $\vec{J}$ et $\vec{H}$ dans le métal sont, comme leurs sources, fonctions sinusoïdales du temps à la pulsation ω .

Ainsi, $\vec{H}(x, t) = \underline{H}_m(x) e^{j\omega t} = H_m(x) e^{j\omega(x)} e^{j\omega t}$. En remplaçant dans l'équation de diffusion (projetée selon $\vec{u}_z$), on obtient :

$$\frac{d^2 \underline{H}_m(x)}{dx^2} e^{j\omega t} = \mu_0 \mu_r \sigma j \omega \underline{H}_m(x) e^{j\omega t}, \quad \text{que l'on simplifie en } \frac{d^2 \underline{H}_m}{dx^2} = \mu_0 \mu_r \sigma j \omega \underline{H}_m. \quad \text{Et, de même } \frac{d^2 \underline{J}_m}{dx^2} = \mu_0 \mu_r \sigma j \omega \underline{J}_m.$$

A.6- L'équation caractéristique a pour solutions
$$r = \pm \frac{1+j}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu_r \sigma \omega}} \quad \text{donné dans l'énoncé.}$$

Il vient
$$\underline{H}(x, t) = \underline{A}_1 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - x/\delta)} + \underline{A}_2 e^{x/\delta} e^{j(\omega t + x/\delta)}.$$
 Mais comme $\underline{H}$ doit rester fini en module lorsque x tend vers l'infini, la constante $\underline{A}_2$ doit être nulle. Il s'ensuit
$$\underline{H}(x, t) = \underline{A}_1 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - x/\delta)},$$
 et la même façon,
$$\underline{H}(x, t) = \underline{A}_3 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - x/\delta)}.$$

La condition de continuité de H en 0 donne
$$\underline{H}(x, t) = H_0 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - x/\delta)}.$$

Et
$$\vec{J} = \text{rot} \vec{H} \quad \text{entraîne} \quad \vec{J}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{1+j}{\delta} \right) H_0 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - x/\delta)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{puis} \quad \vec{J}(x, t) = H_0 \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - x/\delta + \pi/4)} \vec{u}_y.$$

δ est l'épaisseur de peau, c'est-à-dire la dimension caractéristique de pénétration de l'excitation magnétique et des courants dans le métal.

Pour $f = 10 \text{ kHz}$, on trouve $\delta = 0,16 \text{ mm}$. Ainsi, à une profondeur supérieure à environ 0,5 mm, la densité de courant peut être considérée comme négligeable dans le métal.

A.7- En revenant à l'expression réelle, $H(x, t) = H_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta) u_z$ et $J(x, t) = H_0 \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \pi/4) u_y$.

A.8-
$$P_v = \frac{1}{\sigma} \frac{\|J\|^2}{\delta^2} = \frac{2H_0^2}{\sigma \delta^2} e^{-2x/\delta} \cos^2(\omega t - x/\delta + \pi/4)$$
, d'où $\langle P_v \rangle = \frac{H_0^2}{\sigma \delta^2} e^{-2x/\delta} = \frac{\mu_0 \mu_r \omega}{2} H_0^2 e^{-2x/\delta}$.

A.9- Qualitativement, la plaque réagit au champ de l'inducteur au moyen de courants qui créent un champ magnétique supplémentaire, s'opposant en partie aux variations du premier.

B / Contrôle non descriptif par courants de Foucault

B.1- Les lignes de champ sont des cercles concentriques d'axe Oy. Elles sont toutes orientées dans le même sens, celui-ci se retournant à chaque demie période.

B.2- Le calcul du champ d'un fil rectiligne infini est plus que classique (exploitation des symétries et

théorème d'Ampère). Il donne $B_z(M, t) = \frac{\mu_0}{2\pi r} i(t) u_\theta$.

Et l'autre champ, uniforme est $B_1(M, t) = \mu_0 \mu_r H_0 \cos(\omega t) u_z$.

Le champ total est donc
$$B(M, t) = \mu_0 \mu_r H_0 \cos(\omega t) \cos(\theta) u_r + \mu_0 \left(\mu_r H_0 \cos(\omega t) \sin(\theta) + \frac{I}{2\pi r} \cos(\omega t + \phi) \right) u_\theta$$
.

ou encore dans la base cartésienne :

$$B(M, t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos(\omega t + \phi) \cos(\theta) u_x + \mu_0 \left(\mu_r H_0 \cos(\omega t) + \frac{I}{2\pi r} \cos(\omega t + \phi) \sin(\theta) \right) u_z$$

En prenant $\phi = 0$ et $t_0 = 0$, on a :

$$B(M, t_0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos(\theta) u_x + \mu_0 \left(\mu_r H_0 + \frac{I}{2\pi r} \sin(\theta) \right) u_z$$

$$B(M, t_1) = 0 \quad B(M, t_2) = -B(M, t_0)$$

Les lignes de champ, qui seraient rectilignes et parallèles à Oz en l'absence du fil, présentent en présence de celui-ci une déformation en demi-cercle, de plus en plus marquée à mesure qu'on se rapproche de l'origine. La figure ci-contre montre un exemple de cartographie du champ.

Si $\phi = 0$, je ne pense pas que les lignes de champ se déforment au cours du temps, car le $\cos(\omega t)$ est en facteur de l'ensemble des termes.

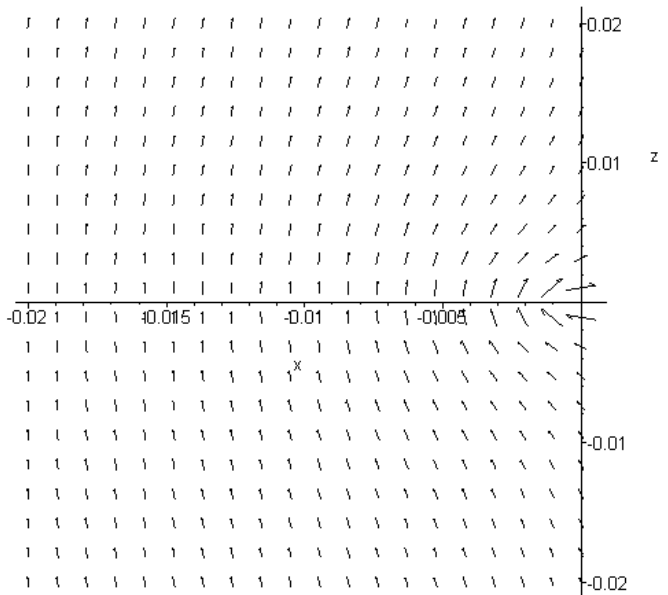
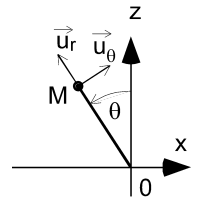
B.3- La condition pour que le fil ajouté à la plaque non fissurée modélise une fissure est que le courant qui y circule compense exactement celui qu'il y aurait dans le cylindre d_2 en l'absence de fissure.

D'où
$$I \cos(\omega t + \phi) = -\frac{\pi d_2^2}{4} J(0, t) = \frac{\pi d_2^2}{4} \frac{H_0 \sqrt{2}}{\delta} \cos\left(\omega t + \frac{5\pi}{4}\right)$$

On en tire par exemple
$$I = \frac{\pi d_2^2}{4} \frac{H_0 \sqrt{2}}{\delta} \quad \text{et} \quad \phi = \frac{5\pi}{4} [2\pi]$$
.

B.4- Appelons A et B les extrémités du capteur tels que $u(t) = V_A - V_B$. La fem $e_{A \rightarrow B}$, orientée de A vers B s'écrit :

$$e_{A \rightarrow B} = -N \frac{d\phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \phi = \iint_{\text{l'aire}} B \cdot dS u_z = \mu_0 \mu_r H_0 s \cos(\omega t)$$
. Donc $e_{A \rightarrow B} = N \mu_0 \mu_r H_0 \omega s \sin(\omega t)$.



Le circuit étant ouvert, on a $u_0(t) = e_{A \rightarrow B}$, d'où $u_0(t) = N\mu_0\mu_r H_0 \omega s \sin(\omega t)$.

La valeur maximale de cette tension est $u_{0\max} = N\mu_0\mu_r H_0 \omega s$.

Le déplacement du capteur n'a aucune influence sur la fonction $u_0(t)$, donc en l'absence de fissure.

B.5- $u_1(t)$ est dû au champ du fil infini (modélisant la fissure). $u_1(t) = -N \frac{d\phi_1}{dt}$ avec

$$\phi_1 = \iint_{\text{Ispire}} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S} u_z = s B_{2z}(x, z, t) = s \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos(\omega t + \varphi) \sin(\theta) = -s \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{D^2 + z^2}} \cos(\omega t + \varphi) \frac{D}{\sqrt{D^2 + z^2}}$$

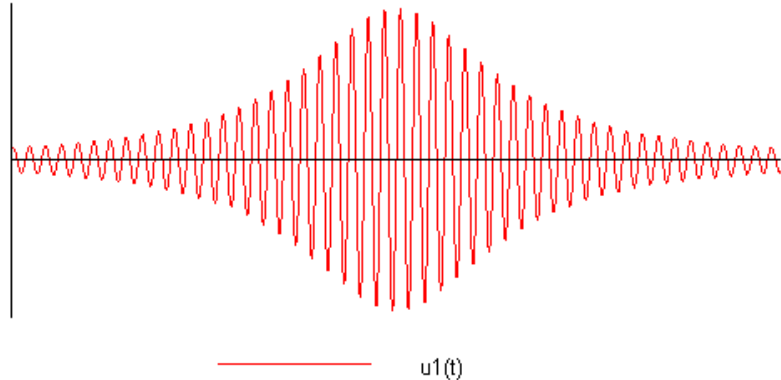
$$u_1(t) = Ns \frac{\mu_0 I D}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\frac{\cos(\omega t + \varphi)}{D^2 + z^2} \right)$$

Si $V_b \ll D\omega$, on peut négliger les variations temporelles dues au déplacement du capteur devant celles dues à la pulsation ω . On a donc

$$u_1(t) \approx -Ns\omega \frac{\mu_0 I D}{2\pi} \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{D^2 + z^2}$$

La valeur max de u_1 est

$$u_{1\max} \approx Ns\omega \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \quad \text{Elle est prise pour } z_{\max} = 0.$$



L'enveloppe est due au terme $\frac{D}{D^2 + z^2(t)}$, qui passe par un maximum pour $z = 0$.

$u(t)$ renseigne sur la présence grâce à sa composante $u_1(t)$ dont l'amplitude passe par un maximum lorsqu'on est au plus près de la fissure. Bien entendu, on ne peut voir l'évolution de l'enveloppe en fonction de z que si on fait varier z , c'est-à-dire si on déplace le capteur selon Oz.

B.6- On peut détecter des fissures dans une plaque tant que $u_{1\max}$ est non négligeable devant $u_{0\max}$. Si on prend comme critère

$$u_{1\max}/u_{0\max} > 10\%, \text{ cela donne } I > 0,2\pi D H_0 \mu_r, \text{ ou encore } D < \frac{1}{0,8} \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{\mu_r}}.$$

B.7- Une fissure parallèle à Oz engendre une variation de $\vec{B}$ orthogonale à Oz, donc ne changerait rien au flux magnétique à travers le capteur d'axe Oz. Pour détecter des fissures parallèles à Oz, il faudrait tourner la plaque d'un quart de tour autour de Ox.

DEUXIEME PARTIE : Propagation d'une onde ultrasonore dans une barre métallique

A / Etude de la barre en traction

A.1- Hooke était un contemporain d'Isaac Newton (1642-1727).

$$\text{A.2- } F = YS \frac{\Delta L}{L} \text{ est bien de la forme } F = K_{eq} \Delta L \text{ avec } K_{eq} = \frac{YS}{L}.$$

$$\text{A.3- Application numérique : } K_{eq} = \frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{0,5} = 2,1 \cdot 10^8 \text{ N.m}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta L = \frac{F}{K_{eq}} = \frac{10^4}{2,1 \cdot 10^8} = 48 \mu\text{m}$$

A.4- Dans d^3 , il y a 1 atome, donc $nd^3 = 1$.

A.5- On peut remplacer deux ressorts identiques parallèles de raideur K par un seul de raideur $K_p = 2K$, puisque l'allongement est le même pour les trois ressorts, et la force dans le ressort équivalent est la somme des forces dans chacun des deux autres.

On peut remplacer deux ressorts identiques de raideur K , en série, par un seul de raideur $K_s = K/2$, puisque la force de tension est la même pour les trois ressorts, et les allongements des deux ressorts s'ajoutent pour donner celui du ressort unique.

Le nombre de ressorts en série par chaîne est $N_s = L/d$.

Le nombre de ressorts en parallèle est $N_p = S/d^2$.

$$K_{eq} = \frac{K \frac{S}{d^2}}{\frac{L}{d}}, \text{ donc } K_{eq} = K \frac{S}{Ld}.$$

A.6- Compte tenu des formules établies à la question précédente, on a

D'après le A.2, $Y = \frac{K_{eq} L}{S}$, d'où $Y = \frac{K}{d}$.

A partir de la loi de Hooke, on a $\Delta L = \frac{F}{YS} L$. L'allongement est bien proportionnel à la longueur de la barre ce qui se justifie par le fait que le nombre de ressorts en série est proportionnel à L.

Remarque : je me suis servi pour ces questions du descriptif de la barre donné seulement dans la partie B qui vient.

B / Modèle de la chaîne infinie d'oscillateurs

B.1- En isolant l'atome de rang q, en lui appliquant la relation fondamentale de la dynamique puis en la projetant selon Ox, on

obtient le résultat classique du cours : $m u_q = K(u_{q+1} - u_q) - K(u_q - u_{q-1})$, soit encore $u_q + 2\omega_0^2 u_q = \omega_0^2 (u_{q+1} + u_{q-1})$.

B.2- On remplace dans l'équation différentielle u_q par $A \cos(\omega t - kqd)$ et on obtient

$$(2\omega_0^2 - \omega^2) A \cos(\omega t - kqd) = A \omega_0^2 (\cos(\omega t - kqd - kd) + \cos(\omega t - kqd + kd)), \text{ ce qui s'écrit encore :}$$

$$(2\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t - kqd) = 2\omega_0^2 \cos(\omega t - kqd) \cos(kd)$$

Puisque ceci doit être vrai à tout instant t, on en tire : $(2\omega_0^2 - \omega^2) = 2\omega_0^2 \cos(kd)$, ou encore $\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{kd}{2}\right)$, que l'on peut

écrire : $\omega = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \right|$.

On voit bien que ω ne peut dépasser la pulsation de coupure donnée par $\omega_c = 2\omega_0$.

Si on soumet la barre à une onde de pulsation $\omega > \omega_c$, l'onde devient évanescente.

Application numérique :

$$K = Yd = 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 250 \cdot 10^{-12} = 52,5 \text{ N.m}^{-1}, \quad \omega_c = 2\omega_0 = 2 \sqrt{\frac{K}{M/N_A}} = 4,8 \cdot 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}, \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 7,6 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$$

C'est une fréquence importante pour une onde sonore.

B.3-
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(qd, t) + \omega_0^2 u(qd, t) = \omega_0^2 \left[\left[u(qd, t) + d \frac{\partial u}{\partial x}(qd, t) + \frac{1}{2} d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(qd, t) \right] + \left[u(qd, t) - d \frac{\partial u}{\partial x}(qd, t) + \frac{1}{2} (-d)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(qd, t) \right] \right],$$

d'où
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(qd, t) = \omega_0^2 d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(qd, t), \text{ ce qui est bien l'équation de d'Alembert, avec une célérité } V = \omega_0 d = d \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{Yd^3}{m}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

La solution générale de cette équation de d'Alembert 1D est de la forme : $u(x, t) = f(t - x/V) + g(t + x/V)$, c'est-à-dire la somme de 2 ondes planes progressives se propageant en sens inverse parallèlement à Ox.

Une onde progressive est une onde pour laquelle la vibration se répète identique à elle-même en se déplaçant dans l'espace à la célérité V.

Pour les ondes sonores dans un fluide, ce qui joue le rôle du module d'Young est l'inverse du coefficient de compressibilité isentropique.

$$V = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 5,2 \text{ km/s}$$

Application numérique : . On note que ceci est proche de la valeur donnée dans la partie E.

$$\rho = \frac{m}{d^3} = \frac{M}{N_A d^3}$$

Au passage, j'ai un souci de valeurs numériques : la figure 6 donnerait (et je l'ai utilisé en B3) : . Et si on fait ce calcul, on trouve 5950 au lieu de 7800 donné en A3.

B.4- Une tranche de longueur dx de la barre contient $\frac{S}{d^2}$ chaînes, et est équivalente à une masse $\frac{S}{d^2} \frac{dx}{d} m$ et un ressort de raideur $\frac{S}{d^2} \frac{d}{dx} K$

L'énergie cinétique de cette tranche est ainsi $dE_c = \frac{S}{d^2} \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d} m \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 = \frac{Sm}{2d^3} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \omega x/V)$, et l'énergie

potentielle : $dE_p = \frac{S}{d^2} \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} K \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx \right)^2$, le terme élevé au carré représentant l'allongement de cette tranche dx . On a

$$\text{donc : } dE_p = \frac{1}{2} (SK/d) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx = \frac{SK}{2d} \frac{A^2 \omega^2}{V^2} \sin^2(\omega t - \omega x/V) dx$$

Or, $\frac{K}{V^2 d} = \frac{m}{d^3}$. On voit donc que pour toute tranche, on a à tout instant $dE_p = dE_c$, il y a équipartition de l'énergie dans le cas d'une onde plane progressive harmonique.

La contrainte de traction subie par l'acier en tout point de la barre est $\sigma(x, t) = Y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$. On en déduit $\frac{\partial \sigma}{\partial t}(x, t) = Y \frac{\partial v}{\partial x}(x, t)$. On pourrait d'ailleurs utiliser cette relation pour introduire l'impédance acoustique de la barre.

Plus précisément, puisque l'onde considérée ici est harmonique, on a même en notation complexe : $j\omega \underline{\sigma} = -\frac{j\omega}{V} Y \underline{v}$, soit

$$\underline{\sigma} = -\frac{Y}{V} \underline{v} \quad \sigma = -\frac{Y}{V} v$$

B.5- La puissance surfacique transportée par cette onde est celle communiquée par une tranche dx à celle qui lui est accolée par la droite. C'est donc le produit de la force surfacique exercée par une tranche sur sa voisine de droite, multipliée par la vitesse de l'interface selon Ox. Telle qu'elle a été définie, la contrainte de traction σ est la force surfacique exercée par une tranche sur sa voisine de gauche, d'où la nécessité du signe -.

$$\text{On en déduit } P(x, t) = \frac{Y}{V} v^2(x, t) = \frac{Y}{V} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - x/V) \quad \langle P \rangle = \frac{Y}{2V} A^2 \omega^2$$

Application numérique :

$$\langle P \rangle = 80 \text{ kW.m}^{-2}$$

L'énergie totale moyenne (je pense que c'est ce que veut l'énoncé) emmagasinée par unité de longueur est :

$$\frac{dE}{dx} = 2 \frac{Sm}{2d^3} A^2 \omega^2 \frac{1}{2} = 5,9 \text{ mJ.m}^{-1}$$

B.6- On calcule les coefficients énergétiques de réflexion et transmission à l'interface acier-air : $T = 3,9.10^{-5}$ et $R = 1 - T \approx 1$. Quasiment toute l'énergie est réfléchie à l'extrémité de la barre.

C / Modèle de la chaîne infinie d'oscillateurs

C.1- La solution $u_i(x, t) = f_i(x) g_i(t)$ est ce qu'on appelle un mode propre, c'est-à-dire une solution sinusoïdale pure.

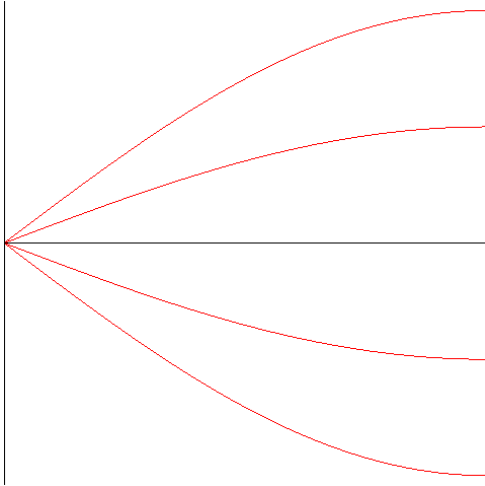
En remplaçant dans l'équation de d'Alembert du B3, on obtient : $-k_i^2 u_i - \frac{1}{V^2} (-\omega_i^2 u_i)$, d'où $k_i^2 = \frac{\omega_i^2}{V^2}$.

C.2- Les conditions aux limites sont $u(0, t) = 0$ (pas de mouvement en 0) et $\sigma(L, t) = 0$ (pas de force en L).

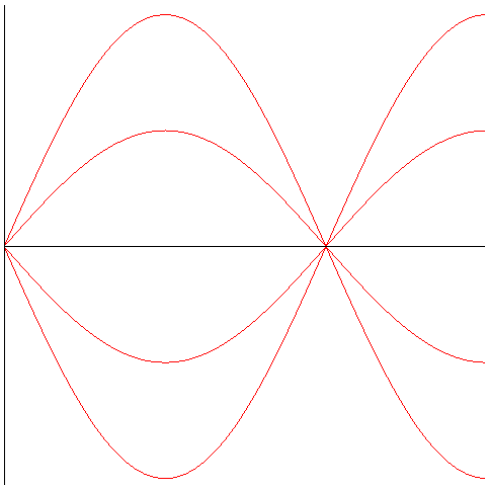
La première condition entraîne $A_i = 0$ pour tout i .

La seconde donne $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$, d'où $\cos(k_i L) = 0$. Les solutions sont $k_i = (2i + 1) \frac{\pi}{2L}$.

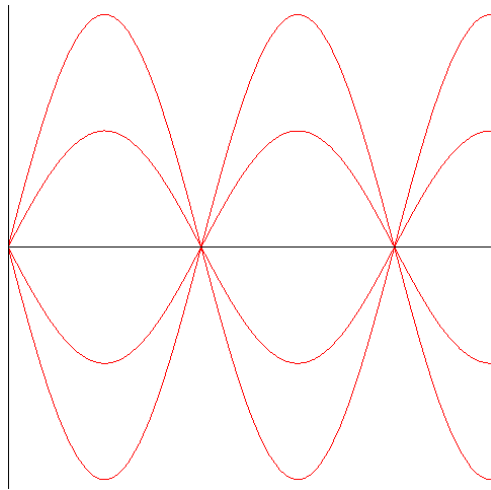
Pour $i = 0$, $k_0 = \frac{\pi}{2L}$ et $u_0(x, t) = U_0 \sin\left(\frac{\omega_0 x}{V}\right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, avec $\omega_0 = \frac{\pi V}{2L}$, donné dans l'énoncé.



Pour $i = 1$, $k_1 = \frac{3\pi}{2L}$ et $u_1(x, t) = U_1 \sin\left(\frac{3\omega_0 x}{V}\right) \cos(3\omega_0 t + \varphi_1)$.



Pour $i = 2$, $k_2 = \frac{5\pi}{2L}$ et $u_2(x, t) = U_2 \sin\left(\frac{5\omega_0 x}{V}\right) \cos(5\omega_0 t + \varphi_2)$.



Puisque $\sigma(x, t) = Y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ (cf B4), les points P où la contrainte est maximale sont les nœuds de vibration, donc les points d'intersections des courbes sur les axes des abscisses.

D / Modèle de la chaîne infinie d'oscillateurs

D.1- A nouveau, on remplace dans l'équation de d'Alembert : $f''(x) + \frac{\omega^2}{V^2} f(x) = 0$, ce qui donne bien $f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$, avec $k = \omega / V$.

La condition $f(0) = A_0$ entraîne $A = A_0$.

Et la condition $\sigma(L, t) = Y \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ conduit à $f'(L) = 0$, d'où $-A_0 \frac{\omega}{V} \sin\left(\frac{\omega}{V} L\right) + B \frac{\omega}{V} \cos\left(\frac{\omega}{V} L\right) = 0$, soit encore $B = A_0 \tan\left(\frac{\omega}{V} L\right)$

D.2- Certaines fréquences conduisent à une divergence de B. Cela correspond à un phénomène de résonance d'amplitude. Elles

ont lieu pour $\frac{\omega}{V} L = (2m+1) \frac{\pi}{2}$, m étant entier. C'est-à-dire $\omega = (2m+1) \omega_0$, ou encore $f = (2m+1) f_0$. On retrouve les fréquences des modes propres.

Pour trouver la valeur du module d'Young, on place un vibreur en $x = 0$ et un accéléromètre en $x = L$. Le vibreur excite la barre de façon harmonique. Ainsi l'accélération est proportionnelle au mouvement. D'après le D1, les vibrations les plus importantes seront obtenues pour les modes propres et alors l'extrémité en L sera assimilable à un ventre de vibration, et aussi un ventre d'accélération.

Ainsi, en cherchant les pulsations qui conduisent à des maxima d'amplitudes de l'accélération en L, on identifie les pulsations

propres, d'où ω_0 , puis $Y = 4\rho \frac{L^2 \omega_0^2}{\pi^2}$

D.3- On voit que les trois valeurs données pour les fréquences sont dans un rapport : 1 ; 3 ; 5. Il vient $\omega_0 = 2\pi \times 2655$, d'où

$Y = 4.7800 \cdot \left(\frac{0,5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2655}{\pi}\right)^2 = 2,2 \cdot 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$. On est assez proche de la valeur donnée au A.

Pour l'incertitude, on peut utiliser la formule de propagation des erreurs :

$\Delta Y = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial \rho} \Delta \rho\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial L} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial f_0} \Delta f_0\right)^2}$, d'où $\Delta Y = \sqrt{(16 \cdot f_0^2 \cdot L^2 \cdot \Delta \rho)^2 + (32 \cdot \rho \cdot f_0^2 \cdot L \cdot \Delta L)^2 + (32 \cdot \rho \cdot f_0 \cdot L^2 \cdot \Delta f_0)^2}$, ce qui donne $\Delta Y = 1,7 \cdot 10^8 \text{ N.m}^{-2}$ puis $\Delta Y / Y$ de l'ordre de 0,08%.

E / Modèle de la chaîne infinie d'oscillateurs

E.1- La formule donnant le demi-angle au sommet du cône du lobe principal de diffraction à travers une pupille circulaire n'est

$$\theta = 0,61 \frac{\lambda}{R} = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

pas exigible. Mais en l'utilisant, on obtient :

C'est donc très faible. Le faisceau ultrasonore est très directif.

E.2- On voit sur la figure 9 que les 2 échos sont de même amplitude que le signal émis. Donc on peut estimer que $R_B \approx 1$ et $T_A \approx 1$.

Il est donc difficile d'imaginer augmenter T ! ? Je pense qu'on voulait nous amener à parler d'un gel pour adapter les impédances acoustiques et améliorer la transmission du palpeur vers la tige ... ?

$$\frac{2AB}{V_L}$$

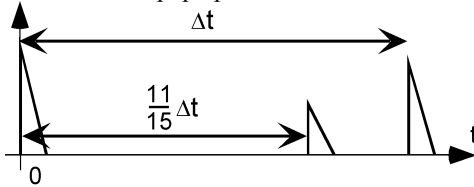
E.3- Sur le graphe de la figure 9, OO_2 correspond à la durée d'un aller-retour (au passage, notons que la figure ne donne visiblement pas les signaux réels mais uniquement leur crête). Et OO_1 correspond à la durée d'émission T_0 . Au moyen d'une règle

$$T_0 = \frac{OO_1}{OO_2} \frac{2AB}{V_L} = \frac{5,5}{43} \frac{0,2}{5190} = 4,9 \mu\text{s}$$

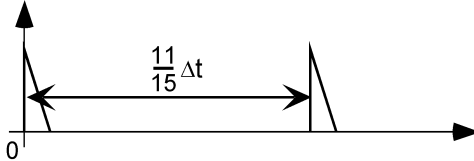
de trois, on a donc

E.4- Si la soupape ne présente pas de défaut, le signal doit avoir à peu près la même allure que sur la figure 9.

E.5- Si la soupape présentait un défaut de soudure, le signal devrait ressembler à ceci (pour un léger défaut),



ou bien à ceci (pour un défaut plus important) :



On peut alors confirmer la position du défaut en plaçant la palpeur sur la face E de la soupape.