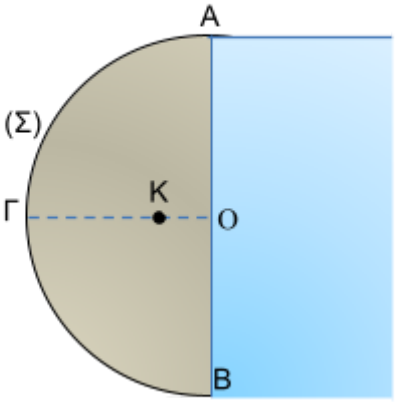
Ημιδίσκιο σε ασταθή ισορροπία

Κόβουμε ένα δίσκο μικρού πάχους, ακτίνας $R = 1m$ κατά μήκος μιας διαμέτρου του ΑΒ. Παίρνουμε το ένα κομμάτι (Σ), μάζας $M = 2kg$ και το στερεώνουμε, όπως στο σχήμα, με αβαρές νήμα, έτσι ώστε η διάμετρος ΑΒ να είναι κατακόρυφη. Αν γνωρίζουμε ότι το κέντρο μάζας του ημιδισκίου Σ, βρίσκεται πάνω στην οριζόντια ακτίνα ΟΓ, στο σημείο Κ, με $OK = d = \frac{4R}{3\pi}$, $g = 10m/s^2$ και η ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο του είναι $I_\delta = \frac{1}{2} M_\delta R^2$



α) Σχεδιάστε τις δυνάμεις και υπολογίστε την τάση του νήματος.

β) Βρείτε το μέτρο της δύναμης, που ασκείται από το οριζόντιο επίπεδο, στο σημείο Β του ημιδισκίου.

γ) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής, που πρέπει να έχει το ημιδίσκιο Σ με το δάπεδο ώστε να μην ολισθαίνει;

Αν κόψουμε το νήμα παρατηρούμε ότι το ημιδίσκιο ξεκινά να κυλίεται χωρίς ολίσθηση, με το επίπεδό του να παραμένει κατακόρυφο.

δ) Ποια είναι η ροπή αδράνειάς του ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο μάζας του Κ;

ε) Ποια θα είναι η γωνιακή ταχύτητα του ημιδισκίου τη στιγμή που η διάμετρος ΑΒ γίνεται για πρώτη φορά οριζόντια;

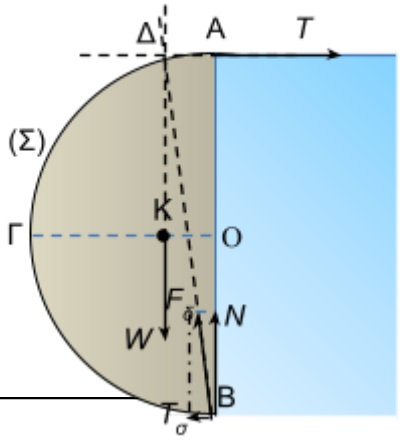
στ) Ποια θα είναι τότε η στροφορμή του ημιδισκίου, ως προς τον οριζόντια άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο;

Απάντηση

σχήμα 1

α) Στο σχήμα (1) έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις.

Βάρος $\vec{W}$, τάση νήματος $\vec{T}$, δύναμη επαφής με το δάπεδο $\vec{F}_\delta$.



Επειδή το στερεό ισορροπεί, οι φορείς των τριών δυνάμεων πρέπει να διέρχονται από το ίδιο σημείο Δ.
Η συνισταμένη των ροπών ως προς το Β θα είναι μηδενική.

$$\Sigma\vec{\tau}_B = 0 \Leftrightarrow W \cdot d - T \cdot 2R = 0 \Leftrightarrow 2R \cdot T = Mg \cdot \frac{4R}{3\pi}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2Mg}{3\pi} \Leftrightarrow T = \frac{40}{3\pi} N \Leftrightarrow T \approx 4,24N$$

β) Αν αναλύσουμε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο σε δύο συνιστώσες, την κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ και την στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$,

$$\Sigma F_\psi = 0 \Leftrightarrow N - W = 0 \Leftrightarrow N = 20N$$

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow T_\sigma - T = 0 \Leftrightarrow T_\sigma = \frac{40}{3\pi} N \approx 4,24N$$

Η δύναμη από το δάπεδο θα έχει μέτρο

$$F_\delta = \sqrt{N^2 + T_\sigma{}^2} = \sqrt{20^2 + \left(\frac{40}{3\pi}\right)^2} \approx 20,4N$$

γ) Η στατική τριβή, που απαιτείται δεν πρέπει να ξεπερνάει την οριακή τριβή μεταξύ δαπέδου και ημιδισκίου.

$$T_\sigma \le T_{o\rho} \Leftrightarrow T_\sigma \le \mu_\sigma \cdot N \Leftrightarrow T_\sigma \le \mu_\sigma \cdot Mg \Leftrightarrow$$

$$\mu_\sigma \ge \frac{T_\sigma}{Mg} \Leftrightarrow \mu_\sigma \ge \frac{40/3\pi}{20} \Leftrightarrow \mu_\sigma \ge \frac{2}{3\pi} \Leftrightarrow \mu_{\sigma,min} = 0,21$$

δ) Ο αρχικός δίσκος θα είχε ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του, που διέρχεται από το κέντρο του Ο,

$$I_{\delta(O)} = \frac{1}{2} 2MR^2 = MR^2$$

Το ημιδίσκιο Σ, <u>ως προς τον ίδιο άξονα</u>, θα έχει τη μισή: $I_O = \frac{1}{2} MR^2$.

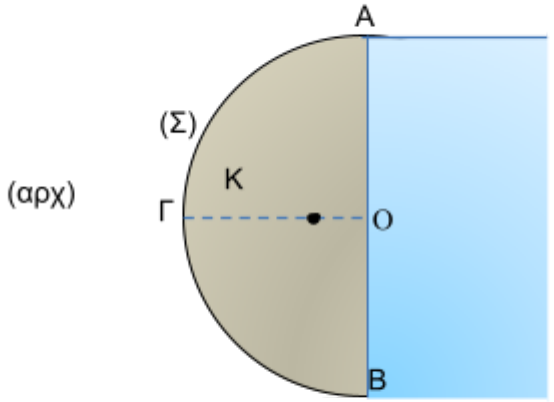
Παίρνοντας το θεώρημα Steiner

$$I_O = I_{cm} + Md^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}MR^2 = I_{cm} + M\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$$

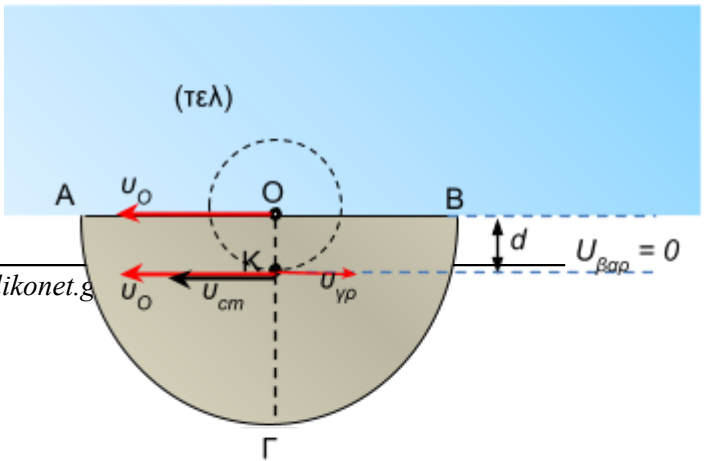
$$\Leftrightarrow I_{cm} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) MR^2 \Leftrightarrow$$

$$I_{cm} = 0,32MR^2 \Leftrightarrow I_{cm} = 0,64kg.m^2$$

σχήμα 2



ε) Για τον υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας θα εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας. Θα χρειαστούμε πρώτα τη σχέση που συνδέει



τα μέτρα της ταχύτητας του κέντρου μάζας με τη γωνιακή ταχύτητα, αφού το κέντρο μάζας Κ δεν συμπίπτει με το κέντρο Ο του ημιδισκίου. Θεωρούμε την κίνηση ως σύνθετη:

Μεταφορική, με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_O$ του κέντρου Ο και

Στροφική, γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδο του ημιδισκίου, που διέρχεται από το κέντρο του. Όπως βλέπουμε στο σχήμα 2, το κέντρο μάζας Κ έχει οριζόντια ταχύτητα, αφού μεταφέρεται με την οριζόντια ταχύτητα του κέντρου Ο και διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας *d,* γύρω από το κέντρο Ο, με επίσης οριζόντια γραμμική ταχύτητα, δηλαδή

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_O - \upsilon_{\gamma\rho} \Leftrightarrow \upsilon_{cm} = \omega R - \omega d$$
$$\Leftrightarrow \upsilon_{cm} = \omega(R-d)\ (1)$$

Η ΑΔΜΕ θα εφαρμοστεί θεωρώντας την κίνηση:

Μεταφορική, με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$ του κέντρου μάζας Κ και

Στροφική, γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδο του ημιδισκίου, που διέρχεται από το κέντρο μάζας του Κ.

$$U_{\beta,\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} = U_{\beta\alpha\rho,\tau\varepsilon\lambda} + K_{\mu,\tau\varepsilon\lambda} + K_{\pi,\tau\varepsilon\lambda}$$
$$\Leftrightarrow M g d + 0 = 0 + \frac{1}{2} M \upsilon_{cm}^{\ 2} + \frac{1}{2} \cdot I_{cm} \cdot \omega^2$$
$$\xrightarrow{(1)} M g d = \frac{1}{2} M \omega^2 (R-d)^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{cm} \cdot \omega^2$$
$$\Leftrightarrow 2Mgd = \omega^2 \left(I_{cm} + M(R-d)^2 \right)$$
$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2Mgd}{I_{cm} + M(R-d)^2}}$$
$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot \frac{4}{3\pi}}{0,64 + 2 \cdot \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)^2}}$$
$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{16,97}{1,303}} \Leftrightarrow \omega = 3,6\, rad/s$$

στ) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι από την *(1)*

$$\upsilon_{cm} = 3,6 \cdot \left(1 - \frac{4}{3 \cdot 3,14}\right) = 3,6 \cdot (1 - 0,4) = 2,16\, m/s$$

Η στροφορμή του ημιδισκίου ως προς το κέντρο Ο θα είναι

$$L = L_{spin} - L_{\tau\rho\sigma\chi} = I_{cm}\omega - M\upsilon_{cm} d =$$
$$0,64 \cdot 3,6 - 2 \cdot 2,16 \cdot 0,4 = 2,304 - 1,728 = 0,576\, kgm^2/s$$

με φορά προς τον αναγνώστη.

Ανδρέας Ριζόπουλος

Σχόλια

Θα μπορούσαμε να ζητήσουμε και τη γωνιακή επιτάχυνση του ημιδισκίου αμέσως μόλις κόψουμε το νήμα.

Για τον παράλληλο άξονα, που διέρχεται από το Β το θεώρημα Steiner μας δίνει:

$$I_B = I_{cm} + M \cdot (KB)^2 = 0,32MR^2 + M \cdot (d^2 + R^2)$$
$$= M \cdot (1,32R^2 + d^2) = 2 \cdot \left(1,32 + 0,42^2\right) = 3kg.m^2$$

Θεωρώντας την κίνηση μόνο στροφική ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του δίσκου που διέρχεται από το Β έχουμε

$$\Sigma\vec{\tau}_B = I_B \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow W \cdot d = I_B \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow 20 \cdot \frac{4}{3\pi} = 3 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{80}{9\pi} \approx 2,8rad/s^2$$

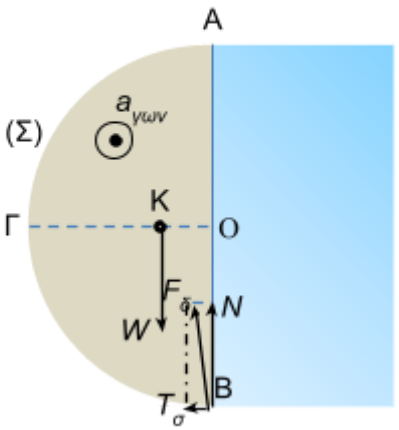
Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας θα είναι

$$\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot (KB) \Leftrightarrow \alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot \sqrt{d^2 + R^2}$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{cm} = 2,8 \cdot \sqrt{0,42^2 + 1} \Leftrightarrow a_{cm} \approx 3m/s^2$$

με την κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα 3.

Το ημιδίσκιο κυλίεται στρεφόμενο

σχήμα2



σχήμα3

