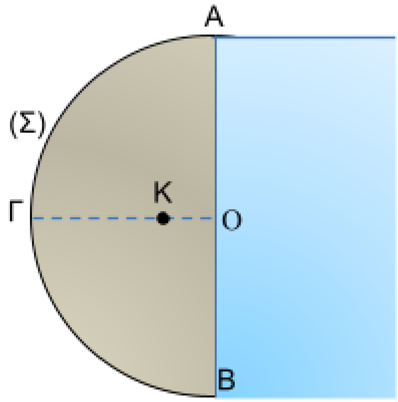
Ημιδίσκιο σε ασταθή ισορροπία

Κόβουμε ένα δίσκο μικρού πάχους, ακτίνας $R = 1m$ κατά μήκος μιας διαμέτρου του ΑΒ. Παίρνουμε το ένα κομμάτι (Σ), μάζας $M = 2kg$ και το στερεώνουμε, όπως στο σχήμα, με αβαρές νήμα, έτσι ώστε η διάμετρος ΑΒ να είναι κατακόρυφη. Αν γνωρίζουμε ότι το κέντρο μάζας του ημιδισκίου Σ, βρίσκεται πάνω στην οριζόντια ακτίνα ΟΓ, στο σημείο Κ, με $OK = d = \frac{4R}{3\pi}$, $g = 10m/s^2$ και η ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο του είναι $I_\delta = \frac{1}{2}M_\delta R^2$



α) Σχεδιάστε τις δυνάμεις και υπολογίστε την τάση του νήματος.

β) Βρείτε το μέτρο της δύναμης, που ασκείται από το οριζόντιο επίπεδο, στο σημείο Β του ημιδισκίου.

γ) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής, που πρέπει να έχει το ημιδίσκιο Σ με το δάπεδο ώστε να μην ολισθαίνει;

Αν κόψουμε το νήμα παρατηρούμε ότι το ημιδίσκιο ξεκινά να κυλίεται χωρίς ολίσθηση, με το επίπεδό του να παραμένει κατακόρυφο.

δ) Ποια είναι η ροπή αδράνειάς του ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο μάζας του Κ;

ε) Ποια θα είναι η γωνιακή ταχύτητα του ημιδισκίου τη στιγμή που η διάμετρος ΑΒ γίνεται για πρώτη φορά οριζόντια;

στ) Ποια θα είναι τότε η στροφορμή του ημιδισκίου, ως προς τον οριζόντια άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο;

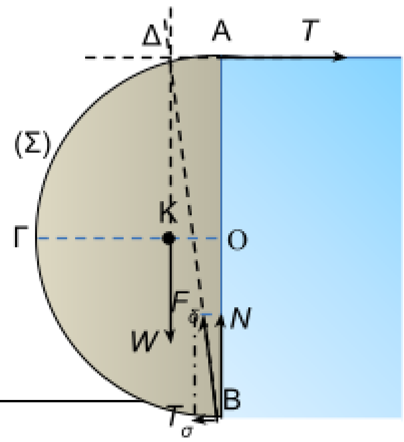
Απάντηση

α) Στο σχήμα (1) έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις.

Βάρος $\vec{W}$, τάση νήματος $\vec{T}$, δύναμη επαφής με το δάπεδο $\vec{F}_\delta$.

Επειδή το στερεό ισορροπεί, οι φορείς των τριών δυνάμεων πρέπει να διέρχονται από το ίδιο σημείο Δ.
Η συνισταμένη των ροπών ως προς το Β θα είναι μηδενική.

σχήμα 1



$$\Sigma\vec{\tau}_B = 0 \Leftrightarrow W\cdot d - T\cdot 2R = 0 \Leftrightarrow 2R\cdot T = Mg\cdot\frac{4R}{3\pi}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2Mg}{3\pi} \Leftrightarrow T = \frac{40}{3\pi}N \Leftrightarrow T \approx 4,24N$$

β) Αν αναλύσουμε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο σε δύο συνιστώσες, την κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ και την στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$,

$$\Sigma F_\psi = 0 \Leftrightarrow N - W = 0 \Leftrightarrow N = 20N$$

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow T_\sigma - T = 0 \Leftrightarrow T_\sigma = \frac{40}{3\pi}N \approx 4,24N$$

Η δύναμη από το δάπεδο θα έχει μέτρο

$$F_\delta = \sqrt{N^2 + T_\sigma^{\,2}} = \sqrt{20^2 + \left(\frac{40}{3\pi}\right)^2} \approx 20,4N$$

γ) Η στατική τριβή, που απαιτείται δεν πρέπει να ξεπερνάει την οριακή τριβή μεταξύ δαπέδου και ημιδισκίου.

$$T_\sigma \le T_{o\rho} \Leftrightarrow T_\sigma \le \mu_\sigma\cdot N \Leftrightarrow T_\sigma \le \mu_\sigma\cdot Mg \Leftrightarrow$$

$$\mu_\sigma \ge \frac{T_\sigma}{Mg} \Leftrightarrow \mu_\sigma \ge \frac{40/3\pi}{20} \Leftrightarrow \mu_\sigma \ge \frac{2}{3\pi} \Leftrightarrow \mu_{\sigma,min} = 0,21$$

δ) Ο αρχικός δίσκος θα είχε ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του, που διέρχεται από το κέντρο του Ο,

$$I_{\delta(O)} = \frac{1}{2}2MR^2 = MR^2$$

Το ημιδίσκιο Σ, <u>ως προς τον ίδιο άξονα</u>, θα έχει τη μισή: $I_O = \frac{1}{2}MR^2$.

Παίρνοντας το θεώρημα Steiner

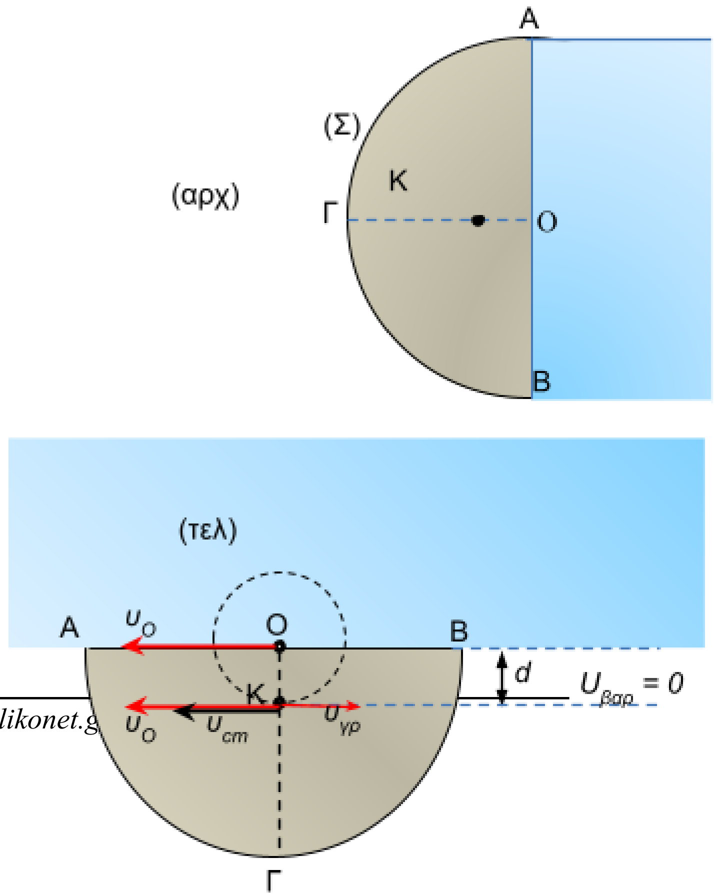
$$I_O = I_{cm} + Md^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}MR^2 = I_{cm} + M\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow I_{cm} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)MR^2 \Leftrightarrow$$

$$I_{cm} = 0,32MR^2 \Leftrightarrow I_{cm} = 0,64kg.m^2$$

ε) Για τον υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας θα εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας. Θα χρειαστούμε πρώτα τη σχέση που συνδέει

σχήμα 2



τα μέτρα της ταχύτητας του κέντρου μάζας με τη γωνιακή ταχύτητα, αφού το κέντρο μάζας Κ δεν συμπίπτει με το κέντρο Ο του ημιδισκίου. Θεωρούμε την κίνηση ως σύνθετη:

Μεταφορική, με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_O$ του κέντρου Ο και

Στροφική, γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδο του ημιδισκίου, που διέρχεται από το κέντρο του. Όπως βλέπουμε στο σχήμα 2, το κέντρο μάζας Κ έχει οριζόντια ταχύτητα, αφού μεταφέρεται με την οριζόντια ταχύτητα του κέντρου Ο και διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας *d,* γύρω από το κέντρο Ο, με επίσης οριζόντια γραμμική ταχύτητα, δηλαδή

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_O - \upsilon_{\gamma\rho} \Leftrightarrow \upsilon_{cm} = \omega R - \omega d$$
$$\Leftrightarrow \upsilon_{cm} = \omega(R - d) \ (1)$$

Η ΑΔΜΕ θα εφαρμοστεί θεωρώντας την κίνηση:

Μεταφορική, με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$ του κέντρου μάζας Κ και

Στροφική, γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδο του ημιδισκίου, που διέρχεται από το κέντρο μάζας του Κ.

$$U_{\beta,\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} = U_{\beta\alpha\rho,\tau\varepsilon\lambda} + K_{\mu,\tau\varepsilon\lambda} + K_{\pi,\tau\varepsilon\lambda}$$
$$\Leftrightarrow M\,gd + 0 = 0 + \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^{\ 2} + \frac{1}{2}\cdot I_{cm}\cdot\omega^2$$
$$\xrightarrow{(1)} M\,gd = \frac{1}{2}M\omega^2(R-d)^2 + \frac{1}{2}\cdot I_{cm}\cdot\omega^2$$
$$\Leftrightarrow 2Mgd = \omega^2\left(I_{cm} + M(R-d)^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2Mgd}{I_{cm} + M(R-d)^2}}$$
$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2\cdot 20\cdot\frac{4}{3\pi}}{0,64 + 2\cdot\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)^2}}$$
$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{16,97}{1,303}} \Leftrightarrow \omega = 3,6\,rad\,/\,s$$

στ) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι από την *(1)*

$$\upsilon_{cm} = 3,6\cdot(1 - \frac{4}{3\cdot 3,14}) = 3,6\cdot(1 - 0,4) = 2,16\,m\,/\,s$$

Η στροφορμή του ημιδισκίου ως προς το κέντρο Ο θα είναι

$$L = L_{spin} - L_{\tau\rho o\chi} = I_{cm}\omega - M\upsilon_{cm}d =$$
$$0,64\cdot 3,6 - 2\cdot 2,16\cdot 0,4 = 2,304 - 1,728 = 0,576\,kgm^2\,/\,s$$

με φορά προς τον αναγνώστη.

Ανδρέας Ριζόπουλος

Σχόλια

Θα μπορούσαμε να ζητήσουμε και τη γωνιακή επιτάχυνση του ημιδισκίου αμέσως μόλις κόψουμε το νήμα.

Για τον παράλληλο άξονα, που διέρχεται από το B το θεώρημα Steiner μας δίνει:

$$I_B = I_{cm} + M\cdot(KB)^2 = 0{,}32MR^2 + M\cdot(d^2+R^2)$$
$$= M\cdot(1{,}32R^2 + d^2) = 2\cdot\left(1{,}32 + 0{,}42^2\right) = 3kg.m^2$$

Θεωρώντας την κίνηση μόνο στροφική ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του δίσκου που διέρχεται από το B έχουμε

$$\Sigma\vec{\tau}_B = I_B\cdot\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow W\cdot d = I_B\cdot a_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow 20\cdot\frac{4}{3\pi} = 3\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{80}{9\pi} \approx 2{,}8rad/s^2$$

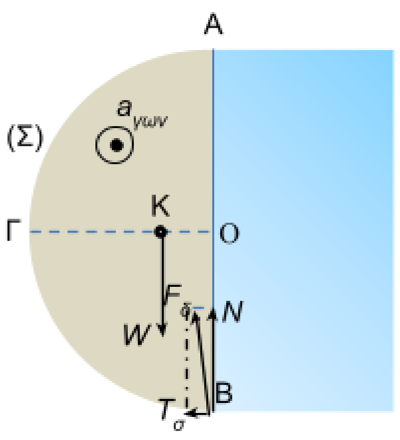
Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας θα είναι

$$\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}\cdot(KB) \Leftrightarrow \alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}\cdot\sqrt{d^2+R^2}$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{cm} = 2{,}8\cdot\sqrt{0{,}42^2+1} \Leftrightarrow a_{cm} \approx 3m/s^2$$

με την κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα 3.

Το ημιδίσκιο κυλίεται στρεφόμενο

σχήμα2



σχήμα3