

Concours Centrale-Supélec 2011 -Epreuve de PHYSIQUE MP

I.A.1) Les points d'une surface atteinte par la lumière se comportent comme des sources secondaires cohérentes, dont l'amplitude complexe est proportionnelle à l'amplitude complexe de l'onde qu'ils reçoivent ainsi qu'à la surface de l'élément de surface qui les entoure.

I.A.2) a) La longueur de la facette suivant Oz étant très grande devant la longueur d'onde λ , le phénomène de diffraction ne modifie pas la composant k_z du vecteur d'onde. La lumière diffractée reste donc comprise dans le plan Oxy .

b) FIGURE 1 La différence de marche à l'infini entre les ondes en O , l'autre en P de coordonnées $(x, 0, 0)$ (voir figure ci-contre) est :

$$\delta = HP + KP = x(\sin i_0 + \sin \theta) ;$$

le déphasage entre ces deux ondes à l'infini est $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$. L'amplitude complexe à l'infini de l'onde diffractée en P peut alors s'écrire :

$$d\underline{s}_P = CA_0 e^{-i\varphi_0} e^{-i\varphi} dx ,$$

où C est une constante multiplicative et φ_0 la phase à l'infini de l'onde diffractée en O . L'amplitude complexe diffractée par l'ensemble de la facette est :

$$\begin{aligned} \underline{s}_0(\theta) &= \int_P d\underline{s}_P = CA_0 e^{-i\varphi_0} \int_{x=0}^b e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i_0 + \sin \theta)x} dx \\ &= CA_0 e^{-i\varphi_0} \frac{e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i_0 + \sin \theta)b} - 1}{-i(2\pi/\lambda)(\sin i_0 + \sin \theta)} = CA_0 e^{-i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{\lambda}(\sin i_0 + \sin \theta)b\right)} \frac{\sin(\pi b(\sin i_0 + \sin \theta)/\lambda)}{\pi(\sin i_0 + \sin \theta)/\lambda} . \end{aligned}$$

c) L'intensité diffractée est :

$$I_0(\theta) = |\underline{s}_0(\theta)|^2 = (CA_0)^2 b^2 \left(\frac{\sin(\pi b(\sin i_0 + \sin \theta)/\lambda)}{\pi b(\sin i_0 + \sin \theta)/\lambda} \right)^2 = I_{0,\max} \left(\frac{\sin(\pi b(\sin i_0 + \sin \theta)/\lambda)}{\pi b(\sin i_0 + \sin \theta)/\lambda} \right)^2 ,$$

où $I_{0,\max}$ est la valeur maximale de cette intensité.

Cette valeur maximale est atteinte pour l'angle θ_0 tel que $\sin i_0 + \sin \theta_0 = 0$ soit $\theta_0 = -i_0$. Il s'agit de la direction prédite par la loi de Descartes pour la réflexion.

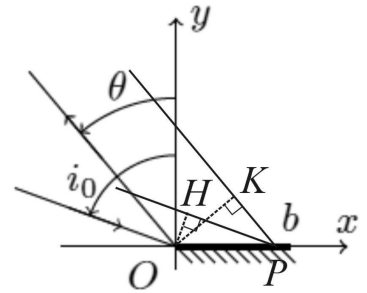
d) FIGURE 2

I.A.3) a) En reprenant le raisonnement précédent :

$$\underline{s}_n(\theta) = CA_0 e^{-i\varphi_0} \int_{x=na}^{na+b} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i_0 + \sin \theta)x} dx = CA_0 e^{-i\varphi_0} \frac{e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i_0 + \sin \theta)(na+b)} - e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i_0 + \sin \theta)na}}{-i(2\pi/\lambda)(\sin i_0 + \sin \theta)} = \underline{s}_0(\theta) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i_0 + \sin \theta)na} ,$$

qui est bien l'expression attendue avec : $\phi = -\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i_0 + \sin \theta)a$.

b) L'amplitude diffractée par l'ensemble des fentes est (selon un calcul classique, mais en dehors du programme MP) :



$$\underline{s}(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{s}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{s}_0(\theta) e^{jn\phi} = \underline{s}_0(\theta) \frac{e^{jN\phi} - 1}{e^{j\phi} - 1} = \underline{s}_0(\theta) e^{j(N-1)\phi/2} \frac{e^{jN\phi/2} - e^{-jN\phi/2}}{e^{j\phi/2} - e^{-j\phi/2}} = \underline{s}_0(\theta) e^{j(N-1)\phi/2} \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}$$

$$I(\theta) = |\underline{s}(\theta)|^2 = N^2 I_0(\theta) \left(\frac{\sin(N\phi/2)}{N \sin(\phi/2)} \right)^2$$

Nous en déduisons l'intensité :

c) La radiation de longueur d'onde $\lambda = 1050 \text{ nm}$ appartient au domaine des infrarouges.

Sur le graphe $I(\theta)$ on constate qu'il y a de la lumière diffractée pratiquement uniquement dans des directions particulières θ_p qui sont celle pour lesquelles $\phi = 2p\pi$, avec p entier qui est appelée ordre d'interférence. Ces directions vérifient :

$$\sin \theta_p + \sin i_0 = p \frac{\lambda}{a} \quad \text{soit} \quad \sin \theta_p = p \frac{\lambda}{a} \quad (\text{car } i_0 = 0).$$

Les valeurs des ordres d'interférence des pics observés sur la figure sont $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ et 3 .

FIGURE

Pour l'ordre 2, $\sin \theta_2 = 2 \frac{\lambda}{a} = 0,52$ (valeur lue sur la figure). On en déduit : $a = \frac{2\lambda}{0,52} \approx 4,0 \mu\text{m}$.

On ne voit que 7 pics parce que pour $|p| > 4$ la relation du réseau donne un sinus supérieur à 1 !

Les pics n'ont pas tous la même amplitude à cause du facteur $I_0(\theta)$. Les pics d'ordre ± 3 disparaissent presque parce que $I_0(\theta_{\pm 3}) \approx 0$. En supposant qu'il s'agit de la première annulation de la fonction $I_0(\theta)$

ont en déduit que $\frac{\pi b}{\lambda} (\sin \theta_{\pm 3}) \approx \pm \pi$ soit $b \approx \frac{a}{3} = 1,3 \mu\text{m}$.

d) λ_1/a λ_2/a La plus grande des deux longueurs d'ondes est la plus déviée par le réseau (dans un ordre donné).

FIGURE

I.B.1) a) On peut reprendre le résultat de **I.A.2)b)** : $\delta = x'(\sin \gamma_0 + \sin \gamma)$.

$$\underline{s}_0(\theta) = C A_0 e^{-i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{\lambda}(\sin \gamma_0 + \sin \gamma)b\right)} \frac{\sin\left(\frac{\pi b(\sin \gamma_0 + \sin \gamma)}{\lambda}\right)}{\pi(\sin \gamma_0 + \sin \gamma)/\lambda}$$

b) On peut reprendre le résultat de **I.A.2)c)** :

c) De même qu'au **I.A.2)c)**, l'intensité diffractée par une facette est maximale lorsque $\gamma = -\gamma_0$.

I.B.2) a) La différence de marche à l'infini entre deux les ondes diffractées par deux points P et P' homologues sur deux facettes consécutives **FIGURE** est :

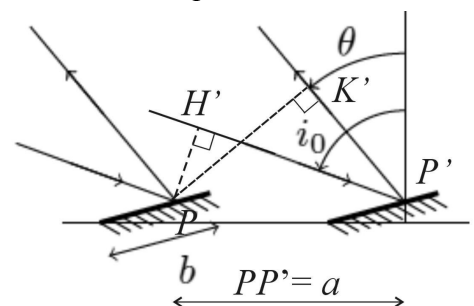
$$\Delta = H'P' + K'P' = a(\sin i_0 + \sin \theta)$$

Le déphasage à l'infini entre ces sondes est :

$$\phi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin i_0 + \sin \theta)$$

b) L'intensité de la lumière diffractée par le réseau est maximale

lorsque : $\phi = 2p\pi$ (p entier) soit dans les directions $\theta = \theta_p$ avec $\sin \theta_p = -\sin i_0 + p \frac{\lambda}{a}$.



c) L'intensité diffractée par une facette est maximale lorsque $\gamma = -\gamma_0$, or $\gamma = \theta - \alpha$ et $\gamma_0 = i_0 - \alpha$, elle est donc maximale dans la direction $\theta = 2\alpha - i_0$. On souhaite que ce soit la direction θ_1 , il faut donc

pour cela que : $\sin(2\alpha - i_0) + \sin(i_0) = \frac{\lambda}{a}$. L'angle α à choisir est donc : $\alpha = \frac{1}{2} \left(i_0 + \arcsin \left(\frac{\lambda}{a} - \sin i_0 \right) \right)$

Application numérique : $a = \frac{1}{1740} 10^{-3} = 0,575 \mu\text{m}$, $\alpha = 66,5^\circ$ et $\theta_1 = 2\alpha - i_0 = 72,1^\circ$.

d) L'intérêt est d'avoir le maximum d'intensité dans une direction différente de celle de la lumière incidente.

I.C.1) a) L'angle d'incidence sur le deuxième réseau est $i'_0 = \theta$ et l'angle de diffraction θ' dans l'ordre

1 est donné par la relation : $\sin i'_0 + \sin \theta' = \frac{\lambda}{a}$. Donc : $\sin \theta' = \frac{\lambda}{a} - \sin i'_0 = \frac{\lambda}{a} - \sin \theta = \sin i_0$ soit $\theta' = i_0$.

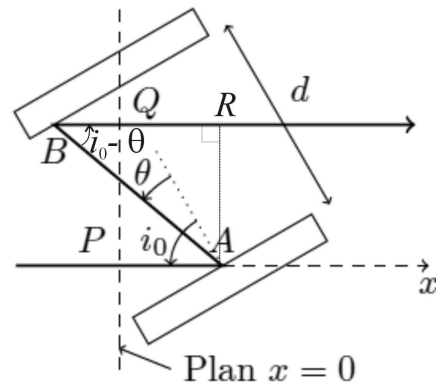
Ainsi, le rayon diffracté par le deuxième réseau est parallèle au rayon incident sur le premier quelle que soit la longueur d'onde.

b) $(PQ) = PA + AB + BQ$; or

$$AB = \frac{d}{\cos \theta} \text{ et FIGURE}$$

$$PA + BQ = BR = AB \cos(i_0 - \theta) = d \frac{\cos(i_0 - \theta)}{\cos \theta} ; \text{ finalement :}$$

$$(PQ) = d \frac{1 + \cos(i_0 - \theta)}{\cos \theta}$$



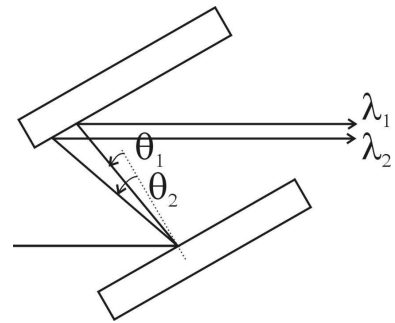
Le temps de parcours de la lumière entre P et Q est :

$$t = \frac{(PQ)}{c} = \frac{d}{c} \frac{(1 + \cos(i_0 - \theta))}{\cos \theta}$$

I.C.2) a) $\sin \theta_i = -\sin i_0 + \frac{\lambda_i}{a}$ $\lambda_1 < \lambda_2$ $\theta_1 < \theta_2$ **FIGURE**

b) Nous pouvons transformer l'expression de t en utilisant la relation des réseaux :

$$\begin{aligned} t &= \frac{d}{c} \frac{1 + \cos i_0 \cos \theta + \sin i_0 \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{d}{c} \left(\cos i_0 + \frac{1 + \sin i_0 \sin \theta}{\cos \theta} \right) \\ &= \frac{d}{c} \left(\cos i_0 + \frac{1 + \sin i_0 \left(\frac{\lambda}{a} - \sin i_0 \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{a} - \sin i_0 \right)^2}} \right) = \frac{d}{c} (\cos i_0 + f(\lambda)) \end{aligned}$$



où $f(\lambda)$ est la fonction définie dans l'énoncé. Ainsi, la différence des temps de parcours pour les deux

longueurs d'onde est : $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{d}{c} (f(\lambda_2) - f(\lambda_1))$

c) $\Delta t = \frac{0,70}{3,00 \cdot 10^8} (7,40 - 5,91) = 3,5 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ et $\beta = \frac{1060 - 1050}{3,5} = 2,9 \text{ nm} \cdot \text{ns}^{-1}$

β est positif donc le temps de propagation est une fonction croissante de la longueur d'onde : la plus grande longueur d'onde est retardée par rapport à la plus petite. Le système est « dispersif ».

$$\underline{A}(\nu) = \int_0^\tau A_0 \exp(j2\pi\nu_0 t) \exp(-j2\pi\nu t) dt = A_0 \frac{\exp(j2\pi(\nu_0 - \nu)\tau) - 1}{j2\pi(\nu_0 - \nu)}$$

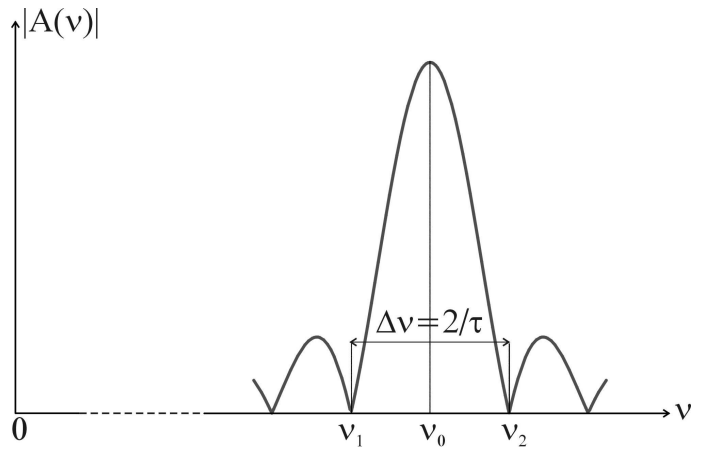
I.C.3) a)

$|\underline{A}(\nu)|$ est l'amplitude de la composante sinusoïdale de fréquence ν . Un calcul identique à celui fait à la question **I.A.2)b)** permet d'obtenir :

$$|\underline{A}(\nu)| = A_0 \tau \left| \frac{\sin(\pi(\nu_0 - \nu)\tau)}{\pi(\nu_0 - \nu)\tau} \right|$$

Cette amplitude est maximale pour $\nu = \nu_0$; les deux premières valeurs d'annulation de part et d'autre de ce maximum sont :

$$\nu_1 = \nu_0 - \frac{1}{\tau} \quad \text{et} \quad \nu_2 = \nu_0 + \frac{1}{\tau}$$



FIGU

$$b) \quad \Delta\nu = \frac{2}{\tau} = 2 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1} \quad \& \quad \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3,00 \cdot 10^8}{1050 \cdot 10^{-9}} = 2,86 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

$$\Delta\lambda = \frac{c}{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}} - \frac{c}{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} \quad \& \quad \frac{c}{\nu_0} \left(1 + \frac{\Delta\nu}{2\nu_0} \right) - \frac{c}{\nu_0} \left(1 - \frac{\Delta\nu}{2\nu_0} \right) = \frac{c\Delta\nu}{\nu_0^2}$$

$$c) \quad \nu \quad \nu_1 \quad \nu_2 \quad \Delta t = \frac{\beta}{\Delta\lambda} = \frac{5}{3,68} = 1,36 \text{ ns} \quad \Delta t \quad \& \quad \tau \quad \Delta t$$

d)

II.A.1) a) Dans le cadre du modèle proposé, les forces agissant sur un électron sont la force exercée par le

champ électrique de l'onde $\vec{qE}$ et la force exercée par le réseau cristallin $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Le principe

fondamental de la dynamique appliqué à un électron s'écrit : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$.

Avec la notation complexe proposée, et en faisant l'hypothèse que $\frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ (ce qu'un étudiant de MP

aura fait spontanément), cette équation s'écrit $j\omega m \underline{v} = q\underline{E} - \frac{m}{\tau}\underline{v}$, ce qui donne : $\underline{v} = \frac{q\tau}{m(1+j\omega\tau)}\underline{E}$.

b) Un ion, de masse au moins 1000 fois plus grande que celle d'un électron, et de plus, dans le cas d'un métal, lié aux autres ions dans le réseau cristallin, aura sous l'action du champ électrique une vitesse bien plus faible qu'un électron. La contribution des ions à la densité de courant peut donc être négligée.

c) La densité de courant complexe dans le métal est $\underline{J} = nq\underline{v} = \frac{nq^2\tau}{m(1+j\omega\tau)}\underline{E}$. On trouve bien la relation

de l'énoncé avec : $\sigma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}$. σ_0 est la conductivité électrique du métal en régime stationnaire.

d) Il y a autant d'électrons libres que d'atomes : $n = \frac{N_A \mu}{M} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \times 19300}{0,197} = 5,90 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

$$\tau = \frac{m\sigma_0}{nq^2} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \times 4,5 \cdot 10^7}{5,90 \cdot 10^{28} \times (1,60 \cdot 10^{-19})^2} = 2,7 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

On peut ensuite calculer :

Pour l'onde considérée, $\lambda = 1050 \text{ nm}$ et $\omega\tau = \frac{2\pi c\tau}{\lambda} = \frac{2\pi \times 3,00 \cdot 10^8 \times 2,7 \cdot 10^{-14}}{1050 \cdot 10^{-9}} \approx 49$, valeur nettement

supérieure à 1. On peut alors faire l'approximation : $\underline{\sigma} \approx \frac{\sigma_0}{j\omega\tau} = -j \frac{nq^2}{m\omega}$.

II.A.2) a) On fait l'hypothèse que les équations de Maxwell s'écrivent dans le métal comme dans le vide, et que la densité volumique de charge est nulle, alors :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 0, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) &= \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

b) On en déduit que :

Par ailleurs : $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$. Il vient donc : $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$.

En notation complexe avec le résultat de la question précédente, il vient : $\Delta \underline{E} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + j\mu_0 \underline{\sigma} \omega\right) \underline{E}$.

c) Avec $\underline{E}(M, t) = \underline{E}(0) e^{j(\omega t - kz)} \underline{u}_x$ cette équation devient : $-k^2 \underline{E} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + j\mu_0 \underline{\sigma} \omega\right) \underline{E}$. Le champ

électrique n'est pas nul partout que si k est solution de l'équation :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0 \underline{\sigma} \omega = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n q^2}{m}$$

en prenant l'expression approchée de $\underline{\sigma}$ trouvée en II.A.2.d). C'est l'équation donnée dans l'énoncé avec :

$$\omega_p^2 = \frac{\mu_0 c^2 n q^2}{m} = \frac{n q^2}{m \epsilon_0}$$

$$d) \omega_p = \sqrt{\frac{5,90 \cdot 10^{28}}{9,11 \cdot 10^{-31} \times 8,85 \cdot 10^{-12}}} \times 1,60 \cdot 10^{-19} = 1,37 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$$

D'autre part, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi \times 3,00 \cdot 10^8}{1050 \cdot 10^{-9}} = 1,80 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$, ainsi $\frac{\omega^2}{\omega_p^2} \approx 58 \ll 1$.

e) Lorsqu'on néglige ω^2 devant ω_p^2 , la relation de dispersion devient : $k^2 = -\frac{\omega_p^2}{c^2}$ soit $k = \pm j \frac{\omega_p}{c}$.

Le signe + nous donnerait $\underline{E}(M, t) = \underline{E}(0) e^{\frac{\omega_p}{c} z} e^{j\omega t} \underline{u}_x$ qui n'est pas acceptable physiquement car le milieu conducteur s'étend dans tout le demi espace $z > 0$ et que cette expression diverge pour $z \rightarrow \infty$.

Ainsi, nécessairement : $k = -j \frac{\omega_p}{c}$.

Le champ électrique de l'onde s'écrit donc : $\underline{E}(M, t) = \underline{E}(0) e^{-\frac{\omega_p}{c} z} e^{j\omega t} \underline{u}_x$.

Pour calculer le champ magnétique qui l'accompagne, on peut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\underline{B}(M, t) = -\frac{1}{j\omega} \text{rot } \underline{E}(M, t) = -\frac{1}{j\omega} \left(\frac{\partial}{\partial z} \underline{u}_z \right) \wedge \left(\underline{E}(0) e^{-\frac{\omega_p}{c} z} e^{j\omega t} \underline{u}_x \right) \quad \text{soit} \quad \underline{B}(M, t) = -\frac{j\omega_p}{c\omega} \underline{E}(0) e^{-\frac{\omega_p}{c} z} e^{j\omega t} \underline{u}_y$$

Ces champs ne se propagent pas : il s'agit d'une onde stationnaire et plus précisément d'un onde évanescente.

f) La distance caractéristique d'atténuation de cette onde lorsqu'on pénètre à l'intérieur du conducteur

$$\delta = \frac{c}{\omega_p} = \frac{3,00 \cdot 10^8}{1,37 \cdot 10^{16}} = 2,19 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

est :

A COMPLETER

II.B.1) On peut calculer le champ magnétique des ondes incidente et réfléchies en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday ou bien la relation de structure des ondes électromagnétiques planes progressives se propageant dans le vide :

$$\underline{B}_i(z, t) = \frac{1}{c} \underline{u}_z \wedge \underline{E}_i(z, t) = \frac{E_0}{c} e^{j\omega(t-z/c)} \underline{u}_y \quad \text{et} \quad \underline{B}_r(z, t) = \frac{1}{c} (-\underline{u}_z) \wedge \underline{E}_r(z, t) = -\frac{rE_0}{c} e^{j\omega(t+z/c)} \underline{u}_y$$

Remarque : d'après la partie II.A l'onde transmise a un champ électromagnétique de la forme :

$$\underline{E}_t(M, t) = \underline{E}(0) e^{-\frac{\omega_p}{c} z} e^{j\omega t} \underline{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{B}_t(M, t) = -j \frac{\omega_p}{c\omega} \underline{E}(0) e^{-\frac{\omega_p}{c} z} e^{j\omega t} \underline{u}_y$$

II.B.2) Le champ électrique est selon $\underline{u}_x$, donc tangent à la surface du métal (plan $z=0$). Il est nécessairement continu de part et d'autre de ce plan, ce qui s'écrit : $\underline{E}_i(0, t) + \underline{E}_r(0, t) = \underline{E}_t(0, t)$.

Le champ magnétique est selon $\underline{u}_y$, donc tangent à la surface du métal, il pourrait donc être discontinu. Cependant, le métal a une conductivité finie et le courant qui y circule a été supposé volumique. Il n'y a

donc pas de courant surfacique et le champ magnétique est continu : $\underline{B}_i(0, t) + \underline{B}_r(0, t) = \underline{B}_t(0, t)$.

II.B.3) Ces deux relations s'écrivent : $(1+r)E_0 = \underline{E}(0)$ et $(1-r)\frac{E_0}{c} = -j\frac{\omega_p}{c\omega}\underline{E}(0)$.

$$r = \frac{1 + j\omega_p/\omega}{1 - j\omega_p/\omega}$$

On en tire :

r Il s'agit d'un nombre complexe de module égal à 1 ; ainsi l'onde réfléchie a même amplitude que l'onde incidente.

$$\underline{E}(0) = \frac{2}{1 - j\omega_p/\omega} E_0 \quad \text{et} \quad E(0) = |\underline{E}(0)| = \frac{2E_0}{\sqrt{1 + (\omega_p/\omega)^2}} \approx \frac{2\omega}{\omega_p} E_0$$

II.B.4) Il vient aussi :

II.B.5) En utilisant le résultat de **II.A.1)a)** on voit que la vitesse des électrons, proportionnelle au champ électrique, a une amplitude de variation maximale en $z=0$. La valeur maximale de la vitesse des

électrons est donc : $v_0 = \left| \frac{q\tau}{m(1+j\omega\tau)} \right| E(0) \approx \frac{|q|}{m\omega} E(0)$ puisque $\omega\tau \gg 1$ d'après **II.A.1)d)**. Ceci s'écrit :

$$v_0 \approx \frac{2|q|}{m\omega_p} E_0 = 2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{nm}} E_0$$

II.C.1) L'énergie minimale à apporter pour ioniser l'atome est égale doit permettre d'amener un des électrons de la couche externe (d'énergie mécanique $E_m < 0$) à l'infini avec une énergie cinétique nulle (donc une énergie mécanique nulle). Elle est donc égale à $-E_m$.

Pour évaluer simplement E_m on peut faire les hypothèses suivantes :

- on considère un électron ayant une orbite circulaire de rayon r ,

$$\left\| \frac{\mathbf{F}}{F} \right\| = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- cet électron est soumis à l'attraction électrostatique du noyau : force de module

$$E_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

découlant de l'énergie potentielle ,

- on néglige la répulsion électrostatique des autres électrons.

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à cet électron s'écrit : ; il en découle

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{E_p}{2} \quad \text{Ainsi :} \quad E_m = E_c + E_p = \frac{E_p}{2} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Nous trouvons donc comme énergie minimale nécessaire pour ioniser l'atome :

$$\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{79 \times (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{8\pi \times 8,85 \cdot 10^{-12} \times 140 \cdot 10^{-12}} = 6,5 \cdot 10^{-17} \text{ J} = \underline{406 \text{ eV}}$$

Cette valeur est bien trop grande. On peut améliorer le modèle en tenant compte de la répulsion électrostatique des électrons plus proches du noyau. L'atome d'or ayant 2 électrons de valence, cela revient à remplacer dans la formule précédente Z par $Z - (Z - 2) = 2$. On trouve alors 10,3 eV, valeur plus proche de la valeur expérimentale.

II.C.2) L'ordre de grandeur v_0 de la vitesse d'un électron provoquant l'ionisation supplémentaire d'un

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 9 \text{ eV} \quad \text{soit} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 9 \times 1,60 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 1,78 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$$

ion du réseau cristallin est tel que

II.C.3) Cette vitesse est donnée aux électrons par le champ de l'onde si son amplitude atteint la valeur :

$$E_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{nm}{\epsilon_0}} v_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5,90 \cdot 10^{28} \times 9,11 \cdot 10^{-31}}{8,85 \cdot 10^{-12}}} \times 1,78 \cdot 10^6 = \underline{6,93 \cdot 10^{10} \text{ V.m}^{-1}}$$

II.C.4) Le vecteur de Poynting moyen d'une onde dont l'amplitude du champ électrique est E_0 vaut :

$$\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{(6,93 \cdot 10^{10})^2}{2 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 3,00 \cdot 10^8} = 6,38 \cdot 10^{18} \text{ W.m}^{-2}$$

. S'il s'agit d'un faisceau laser de section $260 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$,
la puissance de ce faisceau est $260 \cdot 10^{-4} \times 6,38 \cdot 10^{18} = 1,66 \cdot 10^{17} \text{ W} = \underline{166 \text{ PW}}$.

II.C.5) En terme de puissance surfacique, le seuil d'endommagement est $\frac{0,5 \cdot 10^4}{10^{-12}} = 5 \cdot 10^{16} \text{ J.m}^{-2}$. Cette valeur est 100 fois plus petite que celle que donne le modèle. **A VERIFIER.**