

PLANI

BÖLÜM I

Dersin Adı	Matematik	Tarih	9-13/09/2024
Sınıf	10	Süre	6 ders saati
Alt Öğrenme Alanı	SAYMA ve OLASILIK		
Konu	Toplama ve Çarpma Yöntemlerini Kullanarak Sayma		

BÖLÜM II

Kazanım	10.1.1.1. Olayların gerçekleşme sayısını toplama ve çarpma yöntemlerini kullanarak hesaplar.
Değerler	ADALET – Adil Olma
Yöntem ve Teknikler	Düz anlatım, soru-cevap, problem çözme, örnek olay, beyin fırtınası, kavram haritası
Kullanılan Araç-Gereçler	Ders kitabı, yazı tahtası, etkileşimli tahta, z-kitap, internet, fotoğraf, pergel, cetvel

BÖLÜM III

Öğrenme-Öğretme Süreci

Toplama ve Çarpma Yöntemlerini Kullanarak Sayma

İlk sayıların insanın sayma gereksiniminden ortaya çıktığı, akşamları hayvanlarının tam olup olmadığını anlamak isteyen insanlar tarafından kullanıldığı iddia edilmektedir. Tam anlamıyla bir sayı kavramına sahip olmayan bu insanlar, bunu çitten geçen her bir hayvan için başlangıçta boş olan keseye bir çakıl taşı koyarak yapmışlardır. Günümüzde Hint-Avrupa dillerinde “hesap” anlamında kullanılan kalkülüs sözcüğü Latince “çakıl taşı” anlamına gelmekteydi. Böylece her çakıl taşı bir hayvanla eşleşmiştir. Zamanla ortaya çıkan yeni ihtiyaçlar sonucunda sayı kavramı gelişmiş ve sayma işi için farklı yöntemler de kullanılmaya başlanmıştır.

Sayma işleminin farklı yöntemlerle yapılabilmesi insanların bazı kolaylıklar sağlamıştır. Örneğin her rafında 10 kitap bulunan 5 raflı bir kitaplıktaki kitap sayısı hesaplanırken aşağıdaki yollardan biri kullanılabilir.

- Her kitap tek tek sayılarak kitaplıktaki toplam kitap sayısı 50 olarak bulunabilir.
- 5 defa 10 sayısı toplanarak kitaplıktaki toplam kitap sayısı $10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50$ olarak bulunabilir.
- 5 ile 10 çarpılarak kitaplıktaki toplam kitap sayısı $5 \times 10 = 50$ olarak bulunabilir.

Bu yöntemlerden çarpma yoluyla saymanın diğerlerine göre daha hızlı saymayı sağladığı görülmektedir. Fakat her sayma işlemi için çarpma yolunun kullanılması uygun olmayabilir. Örneğin 10 kız, 15 erkek öğrenciden oluştuğu bilinen bir sınıfın mevcudu hesaplanırken uygun olan yöntem, toplama yoluyla saymadır. Herhangi bir sınıftaki erkek öğrenci sayısının bulunmasında ise eşleme yoluyla sayma yapılmalı ve her erkek öğrenci 1 den başlanarak bir ardışık pozitif tam sayı ile eşlenmelidir. Sonuç olarak uygun sayma yönteminin kullanılması bu yöntemi kullanan kişilere zaman kazandırıp kişilerin hayatlarında kolaylık sağlar.

Bir kümenin elemanlarını, pozitif tam sayılar kümesinin elemanları ile sıralı olarak bire bir eşleyerek bulma işlemine **bire bir eşleme yoluyla sayma** denir.

Sonlu ve ayrık kümelerin birleşiminin eleman sayısını bulmak için bu kümelerin eleman sayıları toplanır. Bu yöntemle saymaya **toplama yoluyla sayma** denir. A ile B sonlu ve ayrık iki küme olmak üzere $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olur.

A X B kümesinin elemanları olan (x, y) sıralı ikililerinin sayısı $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ olmak üzere $m \cdot n$ adet olur. Sıralı ikililerin sayısını bu şekilde bulma işlemine çarpma yoluyla sayma denir.

Örnek

Bir vazoda bulunan 4 gül ve 5 karanfil arasından 1 gül veya 1 karanfil kaç farklı biçimde alınabileceğini bulunuz.

Çözüm

Güllerin oluşturduğu kümeye G kümesi denilirse $s(G) = 4$ olur. Karanfillerin oluşturduğu kümeye ise K kümesi denilirse $s(K) = 5$ olur. $s(G \cup K) = s(G) + s(K) = 4 + 5 = 9$ bulunur. Bu durumda bu vazodan 1 gül veya 1 karanfil 9 farklı biçimde alınabilir.

Örnek

Her birinde 8 kitap bulunan 14 kolide kaç kitap olduğunu bulunuz.

Çözüm

Koliler kümesi 14 elemanlı bir küme ve kitaplar kümesi 8 elemanlı bir kümedir.

1. kolideki 1. kitap (1, 1) ile

1. kolideki 2. kitap (1, 2) ile

...

1. kolideki 8. kitap (1, 8) ile

...

14. kolideki 1. kitap (14, 1) ile

14. kolideki 2. kitap (14, 2) ile

...

14. kolideki 8. kitap (14, 8) ile gösterildiğinde

bu sıralı ikililerin sayısı, çarpma yoluyla sayma yöntemine göre koliler kümesindeki eleman sayısı ile kitaplar kümesindeki eleman sayısının çarpımı olan $14 \cdot 8 = 112$ adet olur. Kitapların sayısı ile sıralı ikililerin sayısı aynı olduğundan kitap sayısı 112 adet olur.

Saymanın Temel İlkesi

k tane olayın gerçekleştiği bir olaylar dizisinde birinci olay n_1 farklı biçimde, ikinci olay n_2 farklı biçimde ve bu şekilde devam edildiğinde k ninci olay n_k farklı biçimde gerçekleşiyorsa bu olayların tamamı $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ çarpımı kadar farklı biçimde gerçekleşir.

Örnek

Farklı 3 pantolonu ve farklı 2 çift ayakkabısı olan Oğuz Bey'in bir pantolon ve bir çift ayakkabıyı kaç farklı biçimde giyebileceğini bulunuz.

Çözüm

1. yol
Pantolonların oluşturduğu kümeye P kümesi ve pantolonlara p_1, p_2, p_3 isimleri verilirse $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ olur. Ayakkabıların oluşturduğu kümeye A kümesi ve ayakkabılara a_1, a_2 isimleri verilirse $A = \{a_1, a_2\}$ olur. $s(P) = 3$ ve $s(A) = 2$ olduğundan Oğuz Bey bir pantolon ve bir ayakkabıyı $3 \cdot 2 = 6$ farklı biçimde giyebilir.

2. yol
Yandaki ağaç diyagramıyla sorunun çözümü aşağıdaki gibi yapılabilir. Şekildeki oklar soldan sağa takip edilerek $P \times A = \{(p_1, a_1), (p_1, a_2), (p_2, a_1), (p_2, a_2), (p_3, a_1), (p_3, a_2)\}$ kümesi elde edilir. $s(P \times A) = 6$ olduğundan Oğuz Bey 1 pantolon ve 1 ayakkabı 6 farklı biçimde giyebilir.

Örnek

3 farklı bilyenin 5 farklı kutuya,

- Kaç farklı biçimde atılabileceğini bulunuz.
- Her kutuda en çok bir bilye olmak koşuluyla kaç farklı biçimde atılabileceğini bulunuz.

Çözüm

1. bilye 5 kutudan herhangi birine 5 farklı biçimde, 2. bilye 5 kutudan herhangi birine 5 farklı biçimde, 3. bilye 5 kutudan herhangi birine 5 farklı biçimde atılabilir. Saymanın temel ilkesine göre 3 farklı bilye 5 farklı kutuya $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ farklı biçimde atılabilir.
1. bilye 5 kutudan herhangi birine 5 farklı biçimde, 2. bilye kalan 4 kutudan herhangi birine 4 farklı biçimde, 3. bilye ise kalan 3 kutudan herhangi birine 3 farklı biçimde atılabilir. Bu durumda 3 farklı bilye 5 farklı kutuya her kutuda en çok bir bilye olmak koşuluyla $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ farklı biçimde atılabilir.

Örnek



Yukarıdaki çizgiler A, B ve C şehirleri arasındaki yolları temsil etmektedir. Buna göre A şehirden harekete başlayıp şekildeki yolları kullanan bir aracın B şehrine uğramak koşuluyla

- C şehrine kaç farklı şekilde gidebileceğini bulunuz.
- Kaç farklı şekilde C şehrine gidip tekrar A şehrine dönebileceğini bulunuz.
- Giderken kullandığı yolları dönüşte kullanmamak koşuluyla kaç farklı şekilde C şehrine gidip A şehrine dönebileceğini bulunuz.

Çözüm

- A ile B şehirleri arasında 4 farklı, B ile C şehirleri arasında 3 farklı yol bulunduğundan araç, A şehirden C şehrine $4 \cdot 3 = 12$ farklı şekilde gidebilir.
- A ile B şehirleri arasında 4 farklı, B ile C şehirleri arasında 3 farklı yol ve dönüşte C ile B şehirleri arasında 3 farklı yol, B ile A şehirleri arasında 4 farklı yol bulunduğundan araç, $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 144$ farklı yoldan A şehirden C şehrine gidip dönebilir.
- A ile C şehirleri arasında $4 \cdot 3$ farklı yoldan giden araç, dönüşte ise giderken kullandığı yolları tekrar kullanmayacağından $(3-1) \cdot (4-1) = 2 \cdot 3$ farklı yoldan döner. Böylece koşula uygun toplam gidiş dönüş sayısı $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$ olur.

Örnek

Bir sesli harf ve bir çift rakamdan oluşan kaç farklı sıralı ikili yazılabileceğini bulunuz.

Çözüm

Sesli harflerin oluşturduğu kümeye A kümesi, çift rakamların oluşturduğu kümeye B kümesi denilirse $A = \{a, e, i, o, ö, u, ü\}$ ve $s(A) = 8$ olur. $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ve $s(B) = 5$ olur. Birinci bileşeni bir sesli harf, ikinci bileşeni bir çift rakam olan sıralı ikililerin sayısı bulunurken saymanın temel ilkesi gereği bu iki sayı çarpılır. Dolayısıyla $s(A \times B) = 8 \cdot 5 = 40$ olur. Birinci bileşeni bir çift rakam, ikinci bileşeni ise bir sesli harf olan sıralı ikililerin sayısı $s(B \times A) = 5 \cdot 8 = 40$ olur. Koşula uyan toplam sıralı ikili sayısı $40 + 40 = 80$ olur.

Faktöriyel



Bilgi

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere 1 den n ye kadar olan ardışık tam sayıların çarpımına n faktöriyel (çarpansa) denir ve $n!$ ile gösterilir. Buna göre

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ olur.
- $0! = 1$ ve $1! = 1$ olarak kabul edilir.



İpucu

Birbirinden farklı n tane nesne yan yana $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ farklı şekilde sıralanabilir.

Örnek

Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini bulunuz.

- a) $5!$ b) $7!$ c) $\frac{10!}{8!}$ ç) $7! - 5!$

Örnek

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{(n+4)! - (n+3)!}{(n+3)! + (n+2)!} = \frac{64}{n+4}$ denklemini sağlayan n değerini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{(n+4)! - (n+3)!}{(n+3)! + (n+2)!} &= \frac{64}{n+4} \Rightarrow \frac{(n+4) \cdot (n+3)! - (n+3)!}{(n+3) \cdot (n+2)! + (n+2)!} = \frac{64}{n+4} \\ &\Rightarrow \frac{(n+3)! \cdot (n+4-1)}{(n+2)! \cdot (n+3+1)} = \frac{64}{n+4} \Rightarrow \frac{(n+3) \cdot (n+2)! \cdot (n+3)}{(n+2)! \cdot (n+4)} = \frac{64}{n+4} \\ \frac{(n+3)^2}{n+4} &= \frac{64}{n+4} \Rightarrow (n+3)^2 = 64 \Rightarrow n+3 = 8 \text{ olup } n = 5 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Çözüm

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

- $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ olur (Çarpmanın değişme özelliği olduğundan $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ olarak da hesaplanabilir).
- $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 6!$ olur.
- $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$ olur.
- $7! - 5! = 7 \cdot 6 \cdot 5! - 5! = 5! \cdot (7 \cdot 6 - 1) = 5! \cdot 41$ olur.

Örnek

5 kişinin 5 sandalyeye kaç farklı şekilde oturabileceğini bulunuz.

Çözüm

- sandalyeye 5 kişiden herhangi biri 5 değişik şekilde,
 - sandalyeye kalan 4 kişiden biri 4 farklı şekilde,
 - sandalyeye kalan 3 kişiden biri 3 farklı şekilde,
 - sandalyeye kalan 2 kişiden biri 2 farklı şekilde,
 - sandalyeye kalan 1 kişi 1 farklı şekilde oturur.
- 5 farklı sandalyeye oturuşlarının sayısı, saymanın temel ilkesi kullanılarak $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ bulunur. 1 den 5 e kadar olan ardışık doğal sayıların çarpımının $5!$ olduğuna dikkat ediniz.

Örnek

Anne, baba ve 4 çocuktan oluşan 6 kişilik bir aile yan yana sıralanarak fotoğraf çektirecektir.

- a) Aile bireylerinin kaç farklı biçimde sıralanabileceğini bulunuz.
b) Anne ve baba bir arada olmak üzere aile bireylerinin kaç farklı biçimde sıralanabileceğini bulunuz.

Çözüm

- a) 6 kişilik bu aile herhangi bir koşul olmadan yan yana $6!$ farklı biçimde sıralanabilir.
b)



Anne ve baba birbirinden ayrılmayacağına göre çocuklarla yer değişimi yapılırken anne ve baba 1 kişi gibi düşünülür. Dolayısıyla ailedeki kişi sayısı $1 + 4 = 5$ olarak alınır. Yan yana $5!$ sayıda sıralanırlar. Elde edilecek her sıralamada anne ve baba birbiriyle $2!$ kadar yer değiştirebileceğinden tüm sıralama sayısı $5! \cdot 2! = 120 \cdot 2 = 240$ olur.

BÖLÜM IV

Ölçme ve Değerlendirme

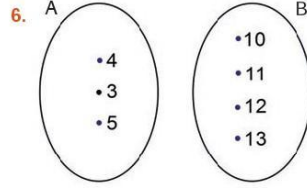
1. Rakamlarının çarpımı 12 olan üç basamaklı, rakamları farklı kaç doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

2. a, b ve c birbirinden farklı birer rakam olmak üzere $a + b + c = 6$ eşitliğini sağlayan üç basamaklı kaç tane abc sayısı olduğunu bulunuz.

3. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak 200 ile 340 arasında kaç farklı doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

4. 5 karakterli bir şifrede Türk alfabesindeki 29 harf, 10 rakam ve $A = \{ @, \%, x, \#, \emptyset, ? \}$ kümesindeki elemanlar kullanılabilir. Ancak bu şifrede art arda gelen iki karakterin birbirinden farklı olma zorunluluğu vardır. Bu şifreyi bilmeyen birisinin deneme yanılma yoluyla şifreyi kesinlikle bulabilmesi için en az kaç deneme yapması gerektiğini bulunuz.

5. 5892 sayısının rakamları yer değiştirilerek yazılabilecek 4 basamaklı doğal sayıların toplamı $6666 \cdot (a!)$ olduğuna göre a doğal sayısını bulunuz.



Venn şeması ile verilen A ve B kümeleri için x, A kümesindeki herhangi bir elemanı ve y, B kümesindeki herhangi bir elemanı göstermek üzere aşağıdaki koşullara uygun (x, y) şeklinde eşlemeler yapılacaktır.

- A kümesinde eşlenmeyen eleman kalmamalıdır.
- A kümesinden alınan her bir eleman B kümesinden yalnız bir elemanla eşlenecektir.

Verilen koşullara uygun yapılan eşlemelerin olduğu kümeye F adı verilirse F kümesinin kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini bulunuz.

7. Bir banka bilgisayar programıyla aşağıdaki koşullara uygun 6 haneli farklı şifreler oluşturup şifreleri müşterilerine verecektir.
- Şifre 4 farklı rakam ve 2 sesli harften oluşacaktır.
 - Şifre bir tek rakam ile başlayıp yine bir tek rakam ile bitecektir.
 - Şifrenin 3. ve 5. hanesi aynı sesli harften oluşacaktır.

Buna göre kaç farklı şifre oluşturulabileceğini bulunuz.

Dersin Diğer Derslerle İlişkisi

BÖLÜM IV

Planın Uygulanmasına İlişkin Açıklamalar

Konu öngörülen ders saatinde işlenmiş olup gerekli değerlendirmeler yapılarak amacına ulaşmıştır.