TD 5 - vect, sev supplémentaires

Travail en autonomie :

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1,1,3)$, $u_2 = (1,-1,-1)$, $v_1 = (1,0,1)$ et $v_2 = (2,-1,0)$. Montrer que $Vect(u_1, u_2) = Vect(v_1, v_2)$.

Montrons que v_1 et v_2 s'expriment comme combinaisons linéaires de u_1 et de u_2:

$$v_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \quad \frac{1}{2}(1\,;\,1\,;\,3) + \frac{1}{2}(1\,;\,-1\,;\,-1) = (1\,;0\,;1)$$

$$v_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2 \quad \frac{1}{2}(1\,;\,1\,;\,3) + \frac{3}{2}(1\,;-1\,;\,-1) = (2\,;\,-1\,;0)$$

Ainsi toute combinaison linéaire de v_1 et v_2 sera aussi une combinaison linéaire de u_1 et u_2 donc

$$Vect(v_1\,;\,v_2) \subset Vect(u_1\,;\,u_2)$$

On inverse le système $v_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$ et $v_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2$, ce qui donne :

$$u_1 = 3v_1 - v_2 \text{ et } u_2 = -v_1 + v_2$$

Ainsi toute combinaison linéaire de u_1 et u_2 sera aussi une combinaison linéaire de v_1 et v_2 donc :

$$Vect(v_1\,;\,v_2) \subset Vect(u_1\,;\,u_2)$$

et par conséquent :

$$Vect(v_1\,;\,v_2) = Vect(u_1\,;\,u_2)$$

Exercice 2 : Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u_1 = (1,2,3,4)$ et $u_2 = (1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer des réels x et y tels que $(x,1,y,1) \in Vect(u_1,u_2)$? Et tels que $(x,1,1,y) \in Vect(u_1,u_2)$?

- S'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,1,y,1) \in Vect(u_1, u_2)$ alors il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$(x,1,y,1) = \lambda(1,2,3,4) + \mu(1,-2,3,-4)$$

on obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda+\mu = x \\ 2\lambda - 2\mu = 1 \\ 3\lambda + 3\mu = y \\ 4\lambda - 4\mu = 1 \end{cases}$$

En prenant les équations E2 et E4, on obtient que $\lambda - \mu = \frac{1}{2}$ et $\lambda - \mu = \frac{1}{4}$, ce qui est impossible.

donc x, y **n'existent pas.**

- S'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,1,1,y) \in Vect(u_1, u_2)$ alors il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$(x,1,1,y) = \lambda(1,2,3,4) + \mu(1,-2,3,-4)$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = x \\ 2\lambda - 2\mu = 1 \\ 3\lambda + 3\mu = 1 \\ 4\lambda - 4\mu = y \end{cases}$$

Avec les équations E2 et E4, on obtient que $\lambda - \mu = \frac{1}{2}$ et $\lambda - \mu = \frac{y}{4}$

Avec les équations E1 et E3, on obtient que $\lambda + \mu = x$ et $\lambda + \mu = \frac{1}{3}$

donc **si** $x = \frac{1}{3}$ **et** $y = 2$ le système se réduit à 2 équations et deux inconnues et on peut déterminer λ et μ

Dans ce cas : $(x, 1, 1, y) \in Vect(u_1, u_2)$.

A faire pour préparer le TD :

Exercice 3 : Trouver des sous-espaces vectoriels distincts F et G de $\mathbb{R}^3$ tels que

1. $F + G = \mathbb{R}^3$ et $F \cap G \neq \{0\}$;
2. $F + G \neq \mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \{0\}$;
3. $F + G = \mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \{0\}$;
4. $F + G \neq \mathbb{R}^3$ et $F \cap G \neq \{0\}$.

1. $F + G = \mathbb{R}^3$ et $F \cap G \neq \{0\}$;

Soit F : Le plan d'équation $y = 0$, il est engendré par $\vec{i}$ et $\vec{k}$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3\} = Vect\{(1, 0, 0) ; (0, 0, 1)\}$$

Soit G : Le plan d'équation $x = 0$, il est engendré par $\vec{j}$ et $\vec{k}$:

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\} = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = Vect\{(0, 1, 0) ; (0, 0, 1)\}$$

car soit $u = (0, y, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$

- $\mathbb{R}^3 = F + G$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) = \left[x(1, 0, 0) + \frac{z}{2}(0, 0, 1)\right] + \left[y(0, 1, 0) + \frac{z}{2}(0, 0, 1)\right] = u_1 + u_2$$

avec :

$$u_1 = x(1, 0, 0) + \frac{z}{2}(0, 0, 1) \in F$$

$$u_2 = y(0, 0, 0) + \frac{z}{2}(0, 0, 1) \in G$$

donc $\mathbb{R}^3$ est inclus dans F+G

Or il est évident que tout élément de F+G est un élément de $\mathbb{R}^3$, donc $\mathbb{R}^3 = F + G$

- $F \cap G \neq \{0\}$

Soit $u = (x, y, z) \in F \cap G$, donc $u \in F$ et $u = (x, 0, z)$ et donc $u \in G$ et $u = (0, y, z)$

On en déduit que $u = (0, 0, z)$ donc

$$F \cap G = Vect\{(0, 0, 1)\} = \{(x, y, z) / x = 0;\ y = 0\} \text{ (droite vectorielle)}$$

F et G ne sont donc pas en somme directe sur $\mathbb{R}^3$.

Ou bien il suffit de prendre $u = (0, 0, 1)$, il appartient à F et à G donc il appartient à $F \cap G$ et $F \cap G \neq \{0\}$.

2. $F+G \neq \mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \{0\}$;

F : La droite d'équations $x = 0; y = 0$.

$F = \{(x, y, z) \,/\, x = 0 \; et \; y = 0\} = \{(0, 0, z),\ z \in \mathbb{R}\} = Vect\{(0, 0, 1)\}$

G : La droite d'équations $x = 0; z = 0$.

$G = \{(x, y, z)/x = 0 \; et \; z = 0\} = \{(0, y, z),\ y \in \mathbb{R}\} = Vect\{(0, 1, 0)\}$

Soit $u \in F + G$ alors $u = (0, y, z)$, son abscisse est nulle.

- $F + G \neq \mathbb{R}^3$

Prenons $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$, il ne peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G, car son abscisse n'est pas nulle.

- $F \cap G = \{0\}$

Soit $u \in F \cap G$, alors $u \in F$; $u(0, 0, z)$ et $u \in G$; $u(0, y, 0)$ on en déduit que $x = y = z = 0$ donc $u = 0$ ainsi $F \cap G = \{0\}$

3. $F+G = \mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \{0\}$;

F : La droite d'équations $x = 0; y = 0$.

G : Le plan d'équation $z = 0$.

$F = Vect\{(0, 0, 1)\}$ et $G = Vect\{(1, 0, 0); (0, 1, 0)\}$

- $\mathbb{R}^3 = F + G$

Il est évident que tout élément de F+G est un élément de $\mathbb{R}^3$ donc $F + G \subset \mathbb{R}^3$

On montre que $\mathbb{R}^3 \subset F + G$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = z(0, 0, 1) + x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) = u_1 + u_2$

avec $u_1 = z(0, 0, 1) \in F$ et $u_2 = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \in G$ donc $\mathbb{R}^3 \subset F + G$

et comme $F + G \subset \mathbb{R}^3$ alors $F + G = \mathbb{R}^3$

- $F \cap G = \{0\}$

Soit $u \in F \cap G$ alors $u \in F$; $u(0, 0, z)$ et $u \in G$; $u(x, y, 0)$ donc $x = y = z = 0$ et $F \cap G = \{0\}$

$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, ces deux ss-ev sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

4. $F+G \neq \mathbb{R}^3$ et $F \cap G \neq \{0\}$.

F : La droite d'équations $x = 0; y = 0$.

G : Le plan d'équation $x = 0$.

$F = Vect\{(0, 0, 1)\}$ et $G = Vect\{(0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$

Soit $u \in F + G$ alors $u = (0, y, z)$, son abscisse est nulle.

- $F + G \neq \mathbb{R}^3$

Soit (1,1,1) $\in \mathbb{R}^3$ mais il ne peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G car l'abscisse n'est pas nulle donc $F + G \neq \mathbb{R}^3$

- $F \cap G \neq \{0\}$

Soit $u \in F \cap G$ donc $u \in F$ et $u = (0, 0, z)$ et $u \in G$ donc $u = (0, y, z)$, on en déduit que $u = (0, 0, z)$ ainsi $F \cap G = Vect\{(0, 0, 1)\} \neq \{0\}$

Exercice 4 : Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ et $G = \text{Vect}\{(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel. Trouver deux vecteurs u, v tels que $F = \text{Vect}(u,v)$.
2. Calculer $F \cap G$ et montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$. Que conclure ?

1. Montrer que F est un espace vectoriel. Trouver deux vecteurs u, v tels que $F = \text{Vect}(u,v)$.

Démontrons que Fest un sev de $\mathbb{R}^3$.

- Le vecteur $(0,0,0) \in F$ car $0+0+0=0$
- Soient (x_1, y_1, z_1) et $(x_2, y_2, z_2) \in F^2$ alors $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=0$ car $x_1+y_1+z_1=0$ et $x_2+y_2+z_2=0$ donc la somme est aussi dans F
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $u(x,y,z) \in F$ alors $(\lambda x)+(\lambda y)+(\lambda z)=\lambda(x+y+z)=0$ donc $\lambda.u \in F$

Trouvons deux vecteurs qui engendrent F

il suffit de poser $x=1$ et $z=0$ alors $y=-1$ et il suffit de poser $x=1$ et $y=0$ alors $z=-1$

On doit vérifier que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

$F = Vect\{(1,-1,0);(1,0,-1)\}$

ou bien $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$ ainsi $x=-y-z$ donc $F = \{(-y-z\,;\,y\,;\,z)\}$

Or $(-y-z\,;\,y\,;\,z) = -y(1\,;\,-1\,;\,0) - z(1\,;\,0\,;\,-1)$ donc $F = Vect\{(1,-1,0);(1,0,-1)\}$

2. Calculer $F \cap G$ et montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$. Que conclure ?

- $F \cap G = \{0\}$

Soit $u \in F \cap G$ alors $u \in F$ donc $u = (x+y; -x, -y)$ et $u \in G$ donc $u=(z,z,z)$

On en déduit le système à résoudre : $\begin{cases} x+y=z \\ -x=z \\ -y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -z-z=z \\ x=-z \\ y=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=-z=0 \\ y=-z=0 \end{cases}$ $F \cap G = \{0\}$

- $F + G = \mathbb{R}^3$

Il est évident que tout élément de $F+G$ est dans $\mathbb{R}^3$ donc $F+G \subset \mathbb{R}^3$

Comme $F = Vect\{(1,-1,0);(1,0,-1)\}$, les éléments de F s'écrivent $v=(a+b,-a,-b)$

Soit $u \in \mathbb{R}^3$, $u=(x,y,z)$, on cherche $v=(a+b,-a,-b) \in F$ et $w=(c,c,c) \in G$ tel que $u=v+w$

<table>
<tr><td>Version système</td><td>Version matricielle</td></tr>
<tr><td>

$\begin{cases} x=a+b+c \\ y=-a+c \\ z=-b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+b+c \\ x-y=2a+b & L_1-L_2 \\ x-z=a+2b & L_1-L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+b+c \\ 2x-2y=4a+2b & 2L_2 \\ 2x-2z=2a+4b & 2L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=a+b+c \\ x-2y+z=3a \\ -x-y+2z=-3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+b+c \\ a=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}y+\frac{z}{3} \\ b=\frac{x}{3}+\frac{y}{3}-\frac{2}{3}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}y+\frac{z}{3} \\ b=\frac{x}{3}+\frac{y}{3}-\frac{2}{3}z \\ c=\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3} \end{cases}$

ainsi il existe un unique triplet (a,b,c) tel que

$u=(a+b,-a;-b)+(c,c,c)$ donc $\mathbb{R}^3 \subset F+G$

</td><td>

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors $\begin{cases} x=a+b+c \\ y=-a+c \\ z=-b+c \end{cases}$ devient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ou $X = AY$

On veut isoler $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, ainsi on cherche A^{-1} telle que $A^{-1}X = Y$

Or $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ ainsi $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

on obtient :

$\begin{cases} a=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}y+\frac{z}{3} \\ b=\frac{x}{3}+\frac{y}{3}-\frac{2}{3}z \\ c=\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3} \end{cases}$

</td></tr>
</table>

On en déduit que $\mathbb{R}^3 = F+G$ et $F \cap G = \{0\}$, **ainsi F et G sont supplémentaires.** $\mathbb{R}^3 \oplus F+G$

Exercice 5 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ des matrices de $M_2(\mathbb{R})$.

1. Quel est l'espace vectoriel F engendré par A et B ? Idem avec G engendré par C et D.
2. Calculer $F \cap G$. Montrer que $F + G = M_2(\mathbb{R})$. Conclure.

1. Quel est l'espace vectoriel F engendré par A et B ? Idem avec G engendré par C et D.

$F = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, d \in \mathbb{R}\}$

$G = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, c, b \in \mathbb{R}\}$

2. Calculer $F \cap G$. Montrer que $F + G = M_2(\mathbb{R})$. Conclure.

Soit $M \in F \cap G$, alors $M \in F$; $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et $M \in G$; $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ donc $a = b = c = d = 0$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ainsi $F \cap G = \{0\}$

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donc $M = aA + dB + bC + cD = M_1 + M_2$ avec $M_1 \in F$ et $M_2 \in G$

donc $F + G = M_2(\mathbb{R})$

Fet Gsont en somme directe sur $M_2(\mathbb{R})$. A savoir $M_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$

Exercice 6 : On considère dans $\mathbb{R}^4$ les cinq vecteurs suivants : $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$. Dire si les sous-espaces suivants sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

1. $Vect(v_1, v_2)$ et $Vect(v_3)$.
2. $Vect(v_1, v_2)$ et $Vect(v_4, v_5)$.
3. $Vect(v_1, v_3, v_4)$ et $Vect(v_2, v_5)$.
4. $Vect(v_1, v_4)$ et $Vect(v_3, v_5)$.

1. $Vect(v_1, v_2)$ et $Vect(v_3)$.

$v_1 = (1, 0, 0, 1)$; $v_2 = (0, 0, 1, 0)$;$v_3 = (0, 1, 0, 0)$; $v_4 = (0, 0, 0, 1)$; $v_5 = (0, 1, 0, 1)$

Soit $v \in Vect(v_1, v_2) + Vect(v_3)$ alors v s'écrit : $v = av_1 + bv_2 + cv_3 = (a, c, b, a)$

Soit $u(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, si $x_1 \neq x_4$ alors $u \notin Vect\ (v_1, v_2) + Vect(v_3)$, donc $\mathbb{R}^4 \neq Vect(v_1, v_2) + Vect(v_3)$

donc ils ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

2. $Vect(v_1, v_2)$ et $Vect(v_4, v_5)$.

$v_1 = (1, 0, 0, 1)$; $v_2 = (0, 0, 1, 0)$; $v_3 = (0, 1, 0, 0)$; $v_4 = (0, 0, 0, 1)$; $v_5 = (0, 1, 0, 1)$

- Soit $v \in Vect(v_1, v_2) + Vect(v_4, v_5)$, $v = av_1 + bv_2 + dv_4 + ev_5 = (a, e, b, a + d + e)$

$u(x, y, z, t) \in Vect(v_1, v_2) + Vect(v_4, v_5)$ssi $x = a$, $y = e$, $z = b$, $t = a + d + e$

ssi $a = x$, $b = z$, $e = y$, $d = t - x - y$

donc $\forall u \in \mathbb{R}^4$, $v(x, y, z, t) \in Vect(v_1, v_2) + Vect(v_4, v_5)$ donc $\mathbb{R}^4 \subset Vect(v_1, v_2) + Vect(v_4, v_5)$

et $Vect(v_1, v_2) + Vect(v_4, v_5) \subset \mathbb{R}^4$

donc $Vect(v_1, v_2) + Vect(v_4, v_5) = \mathbb{R}^4$

- $v \in Vect(v_1, v_2) \cap Vect(v_4, v_5)$ ssi $v = av_1 + bv_2 = dv_4 + ev_5$ ssi $(a, 0, b, a) = (0, e, 0, d + e)$ ssi $a = 0,\ e = 0,\ b = 0,\ e + d = 0$ ssi $a = 0,\ e = 0,\ b = 0,\ d = 0$

donc $Vect(v_1, v_2) \cap Vect(v_4, v_5) = \{0\}$ donc ils sont supplémentaires.

3. $Vect(v_1, v_3, v_4)$ et $Vect(v_2, v_5)$.

$v_1 = (1, 0, 0, 1)$; $v_2 = (0, 0, 1, 0)$;$v_3 = (0, 1, 0, 0)$; $v_4 = (0, 0, 0, 1)$; $v_5 = (0, 1, 0, 1)$

$Vect(v_1, v_3, v_4) = \{(a, c, 0, d),\ a,\ c,\ d\ \in \mathbb{R}\}$

$Vect(v_2, v_5) = \{(0, e, b, e),\ b,\ e\ \in \mathbb{R}\}$

- $v \in Vect(v_1, v_3, v_4) \cap Vect(v_2, v_5)$ ssi

$v = av_1 + cv_3 + dv_4 = bv_2 + ev_5$ssi $(a,\ c,\ 0, d) = (0,\ e,\ b,\ e)$ ssi $a = 0,\ c = e,\ b = 0,\ d = e$

donc par exemple $v = (0, 1, 0, 1) \in Vect(v_1, v_3, v_4) \cap Vect(v_2, v_5)$

donc $Vect(v_1, v_3, v_4) \cap Vect(v_2, v_5) \neq \{0\}$ donc ils ne sont pas supplémentaires.

4. $Vect(v_1, v_4)$ et $Vect(v_3, v_5)$.

$v_1 = (1, 0, 0, 1)$; $v_2 = (0, 0, 1, 0)$;$v_3 = (0, 1, 0, 0)$; $v_4 = (0, 0, 0, 1)$; $v_5 = (0, 1, 0, 1)$

$Vect(v_1, v_4) = \{(a, 0, 0, d),\ a,\ d\ \in \mathbb{R}\}$

$Vect(v_3, v_5) = \{(0, e + c, 0, e),\ c,\ e\ \in \mathbb{R}\}$

$v \in Vect(v_1, v_4) \cap Vect(v_3, v_5)$ ssi $(a, 0, 0, d) = (0, e + c, 0, e)$ ssi $a = 0,\ c = \ -e,\ d = e$

donc $v = (0, 0, 0, 1) \in Vect(v_1, v_4) \cap Vect(v_3, v_5)$ et $Vect(v_1, v_4) \cap Vect(v_3, v_5) \neq \{0\}$

donc ils ne sont pas supplémentaires.

Exercice 7 : Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F le sous-espace vectoriel des fonctions périodiques de période 1 et G le sous-espace vectoriel des fonctions f telles que $\lim_{+\infty} f = 0$.

1. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$.
2. Est-ce que F et G sont supplémentaires ?

1. Soit $f \in F \cap G$, alors
   a. $f \in F$, f est 1-périodique, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 1) = f(x)$
   b. $f \in G$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Prenons $f \in E$, telle que $f \neq 0$

Fixons $x_1 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_1) \neq 0$, posons $\epsilon = \left|f(x_1)\right|$, alors $\exists x$ tel que $\forall y > x, |f(y)| < \epsilon$

Choisissons n tel que $x_1 + n > x$ (possible car $\mathbb{R}$ archimédien)

alors $\left|f(x_1 + n)\right| < \epsilon$ or $f(x_1 + n) = f(x_1)$ par périodicité, ce qui est impossible. Donc $f = 0$ et $F \cap G = \{0\}$

2. Prenons la fonction $h \in E$, telle que $h(x) = x$

   On suppose que $E = F + G$, il existe $(f, g) \in F \times G$ tels que $h = f + g$

   $h(x) = f(x) + g(x)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(x + n) = f(x + n) + g(x + n)$

   on obtient que $x + n = f(x) + g(x + n)$

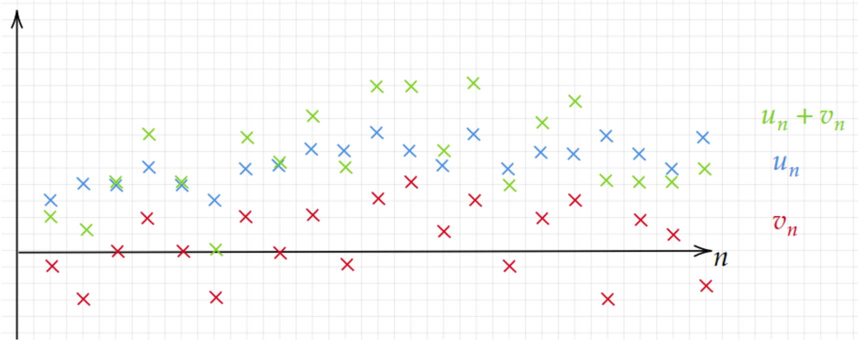
   or $\lim_{n \to +\infty} g(x + n) = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} (x + n) - f(x) \neq 0$ donc $h \neq f + g$

   F et G ne sont pas supplémentaires.

Exercice 8 : Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes. On note F l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0. Montrer que E est un espace vectoriel, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et trouver un sous-espace vectoriel G tel que $F \oplus G = E$.

L'ensemble $H = \{suites\ réelles\}$ de toutes les suites à valeurs réelles est un $\mathbb{R}$-ev :

- On peut additionner deux suites termes à termes



- On peut multiplier une suite par un réel en multipliant chacun de ses termes par ce réel.
- La suite nulle notée 0 (dont tous les termes sont nuls) est l'élément neutre.
- Tous les axiomes d'un espace vectoriel sont respectés.

Montrons que $E = \{suites\ convergentes\}$ est un sev de H.

- La suite nulle telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ converge (vers 0) donc $0 \in E$.
- Soient $(u, v) \in E$, telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = L'$

  La somme est une suite convergente de limite $L + L'$, donc $u + v \in E$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu) est convergente de limite λL, donc $(\lambda u) \in E$

Donc E est un ss-ev de H.

Montrons que $F = \{suites\ réelles\ u_n /\ \lim_{n \to +\infty} u_n = 0\}$est un sev de H

- La suite $u_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ est bien convergente vers 0 donc $O \in F$
- Soient $(u, v) \in E$, telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$

  la somme est une suite convergente de limite $0 + 0 = 0$, donc $u + v \in F$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu) est convergente de limite $\lambda \times 0 = 0$, donc $(\lambda u) \in F$

Donc F est un sev de E.

trouver un sous-espace vectoriel G tel que $F \oplus G = E$.

Prenons $G = \{suites\ constantes\}$, on pourrait facilement démontrer que G est un ss-ev de E.

Démontrons que Fet G sont supplémentaires dans E.

- **Tout d'abord démontrons que $E = F + G$**

Soit (u_n) une suite **convergente** vers L :

$$(u_n) \in E = \{suites\ convergentes\}, \lim_{n \to +\infty} u_n = L$$

On peut **décomposer** la suite (u_n) de la manière suivante :

$$u_n = u_n - L + L$$

Or la suite $(u_n - L)$ **converge vers 0** et (L) est une suite **constante** :

$$(u_n - L) \in F$$

$$(u_n - L) \in F$$

donc toute suite (u_n) de E s'écrit comme **somme** d'un élément de F et d'un élément de G :

$$E = F + G.$$

- Ensuite démontrons que $F \cap G = \{0\}$

Soit $(u_n) \in F \cap G$, alors :

$(u_n) \in F, \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

$(u_n) \in G$, donc $\exists L \in \mathbb{R}, u_n = L, \forall n \in \mathbb{N}$

donc $L = 0$ et (u_n) est la suite nulle, ainsi $F \cap G = \{0\}$

Par conséquent, $E = F \oplus G$ et G est un sev supplémentaire de F.