TEMA A DESARROLLAR

Fracciones Continuas y Fracciones Algebraicas

Guía elaborada por el profesor Joel Fariñez

La presente guía de estudio es una introducción al tema de las fracciones continuas y fracciones algebraicas, dichos temas pueden ser consultados y ampliados en el Álgebra de Baldor capítulo 14 secciones 206 y 207. Leer, analizar e interpretar lo referente a las fracciones algebraicas o racionales y sus respectivas operaciones en el libro Álgebra de Baldor capítulo 14 secciones 193, 194, 195, 196, 197, 198 y 206. También se puede realizar dicho estudio con el libro de Matemática 8vo de los autores Estrella Suárez Bracho y Darío Durán Cepeda de la editorial Santillana desde la página 187 hasta la página 190

La evaluación de los contenidos planteados será a través de un trabajo práctico individual o grupal que se realizará con los ejercicios que en su debido momento asigne el profesor del área de formación de matemática. Dicho trabajo práctico tendrá un valor de 5 puntos o 25% del total de la evaluación continua y el mismo deberá ser entregado con los ejercicios debidamente desarrollados a mano y legibles con su respectiva portada e identificación en su respectiva fecha de entrega.

Fracciones continuas o complejas

Una fracción continua o compleja es una fracción en la cual el numerador o el denominador, o ambos, son fracciones algebraicas o expresiones mixtas

como por ejemplo $\dfrac{\left(\dfrac{a}{x} - \dfrac{x}{a}\right)}{1 + \dfrac{a}{x}}$

la expresión anterior equivale también a $\left(\dfrac{a}{x} - \dfrac{x}{a}\right) \div \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)$

Veamos a continuación unos ejemplos de cómo trabajar con dichas fracciones

Simplificar $\dfrac{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}{1+\frac{a}{x}}$

tenemos que empezar realizando las operaciones indicadas tanto en el numerador como en el denominador

numerador: $\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}=\dfrac{a^2-x^2}{ax}$

denominador: $1+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x+a}{x}=\dfrac{a+x}{x}$

luego se tiene que $\dfrac{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}{1+\frac{a}{x}}=\dfrac{\frac{a^2-x^2}{ax}}{\frac{a+x}{x}}$ de aquí se observa que aplicando la doble c se tiene que multiplicar $\left(a^2-x^2\right)\cdot x$; y también multiplicar $ax\cdot(a+x)$

así se tiene que $\dfrac{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}{1+\frac{a}{x}}=\dfrac{\frac{a^2-x^2}{ax}}{\frac{a+x}{x}}=\dfrac{\left(a^2-x^2\right)\cdot x}{ax\cdot(a+x)}$ en esta última expresión podemos factorizar a $\left(a^2-x^2\right)$

como diferencia de cuadrados, lo cual se explicó en la guía de estudio #4,

$\left(a^2-x^2\right)=(a+x)(a-x)$

luego tenemos que $\dfrac{\left(a^2-x^2\right)\cdot x}{ax\cdot(a+x)}=\dfrac{(a+x)(a-x)}{ax(a+a)}=\dfrac{(a-x)}{ax}$

obsérvese que en la penúltima expresión se pudo cancelar las $(a+x)$

veamos otro ejemplo

Simplificar $\dfrac{x-1-\dfrac{12}{x-2}}{x+6+\dfrac{16}{x-2}}$ procedemos como en el ejemplo anterior

numerador:

$$x-1-\frac{12}{x-2}=\frac{(x-1)(x-2)-12}{x-2}$$
$$=\frac{x^2-3x+2-12}{x-2}$$

numerador:

$$\frac{x^2-3x+2-12}{x-2}=\frac{x^2-3x-10}{x-2}=\frac{(x-5)(x+2)}{x-2}$$ obsérvese que

factorizamos el trinomio $x^2-3x-10$

conforme a lo explicado en la guía #4 (trinomio de la forma x^2+bx+c)

denominador:

$$x+6+\frac{16}{x-2}=\frac{(x+6)(x-2)+16}{x-2}$$
$$=\frac{x^2+4x-12+16}{x-2}$$

denominador:

$$\frac{x^2+4x-12+16}{x-2}=\frac{x^2+4x+4}{x-2}=\frac{(x+2)^2}{x-2}$$

obsérvese que factorizamos el trinomio x^2+4x+4
conforme a lo explicado en la guía #4 (trinomio cuadrado perfecto)

luego nuestra expresión quedará de la siguiente forma

$$\frac{x-1-\dfrac{12}{x-2}}{x+6+\dfrac{16}{x-2}}=\frac{\dfrac{(x-5)(x+2)}{x-2}}{\dfrac{(x+2)^2}{x-2}}$$

aquí se observa que aplicando la doble c podemos cancelar las $x-2$

y así nos queda $$\frac{\frac{(x-5)(x+2)}{x-2}}{\frac{(x+2)^2}{x-2}} = \frac{(x-5)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x-5}{x+2}$$

Fracciones algebraicas

Las fracciones algebraicas son fracciones que pueden contener expresiones polinómicas tanto en el numerador como en el denominador, al realizar operaciones con dichas fracciones hay hallar el mínimo común múltiplo (mcm) y dividir dicho mcm entre cada denominador y el resultado multiplicarlo por el respectivo numerador, si es necesario se hacen las factorizaciones que se requieran para simplificar dichas expresiones.

Veamos a continuación un ejemplo

Simplificar $\frac{1}{a^2-ab}+\frac{1}{ab}-\frac{a^2+b^2}{a^3b-ab^3}$ primero hallamos el mcm factorizando de ser necesario los denominadores

$$a^2-ab=a(a-b)$$

$$ab=ab$$

$$a^3b-ab^3=ab\left(a^2-b^2\right)=ab(a+b)(a-b)$$

luego el mcm es $ab(a+b)(a-b)$

luego tenemos

$$\frac{1}{a^2-ab}+\frac{1}{ab}-\frac{a^2+b^2}{a^3b-ab^3}=\frac{1}{a(a-b)}+\frac{1}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab(a+b)(a-b)}$$

dividiendo el mcm entre cada denominador y multiplicando por el respectivo numerador se tiene

$$\frac{1}{a(a-b)}+\frac{1}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{b(a+b)+(a+b)(a-b)-\left(a^2+b^2\right)}{ab(a+b)(a-b)}$$

multiplicando en el numerador nos queda

$$\frac{ab+b^2+a^2-b^2-a^2-b^2}{ab(a+b)(a-b)}$$

reduciendo nos queda

$$\frac{\left(ab-b^2\right)}{ab(a+b)(a-b)}$$ factorizando y simplificando nos queda

$$\frac{b(a-b)}{ab(a+b)(a-b)}=\frac{1}{a(a+b)}$$

Veamos otro ejemplo

Simplificar $\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{x+3}{x^2+3x-4}+\frac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2}$

procedemos como en el ejemplo anterior, primero hallando el mcm

$x^2-x=x(x-1)$

$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$

$x^4+3x^3-4x^2=x^2\left(x^2+3x-4\right)=x^2(x+4)(x-1)$

luego el mcm es $x^2(x+4)(x-1)$

y aplicando el procedimiento del ejemplo anterior tenemos

$$\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{x+3}{x^2+3x-4}+\frac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2}=\frac{x-2}{x(x-1)}$$

$$-\frac{x+3}{(x+4)(x-1)}+\frac{x^2+12x+16}{x^2(x+4)(x-1)}$$

$$=\frac{x(x+4)(x-2)-x^2(x+3)+x^2+12x+16}{x^2(x+4)(x-1)}$$

multiplicando en el numerador nos queda

$$=\frac{x^3+2x^2-8x-x^3+x^2+12x+16}{x^2(x+4)(x-1)}$$

reduciendo nos queda

$$=\frac{(4x+16)}{x^2(x+4)(x-1)}$$

factorizando y simplificando nos queda

$$=\frac{4(x+4)}{x^2(x+4)(x-1)}=\frac{4}{x^2(x-1)}$$

Ejercicios propuestos

Fracciones algebraicas

Simplificar

a.) $\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x+2}-\frac{(4x-7)}{x^2-x-6}$

b.) $\frac{(x+1)}{x^2-x-20}-\frac{(x+4)}{x^2-4x-5}+\frac{(x+5)}{x^2+5x+4}$

Fracciones continuas

Simplificar

a.) $$\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}$$

b.) $$\frac{x - 1 - \frac{5}{x + 3}}{x + 5 - \frac{35}{x + 3}}$$