SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MATERIAL RECOPILADO Y EDITADO POR EL PROFESOR JOEL FARIÑEZ

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones que puede venir expresado de la siguiente forma

$$\{a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \ a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

En donde las variables: $x, \ y, \ z$ son las incógnitas y las letras con subíndices son los coeficientes de cada ecuación, para resolver un sistema de ecuaciones lineales existen varios métodos de los cuales se van a ver en esta guía tres de dichos métodos que se conocen como: método de sustitución, método de igualación y método de reducción.

Método de Sustitución para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

Sea resolver el sistema:

$\{x + y - z = 0 \ 3x - y + z = 8 \ x - 2y + z = 0$

1.) Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema, por ejemplo, la *x* en la primera ecuación, y se obtiene $x = z - y$ (*)

Este valor de *x* obtenido, se sustituye en la segunda y en la tercera ecuaciones del sistema, o sea:

$$\{3(z - y) - y + z = 8 \ z - y - 2y + z = 0$$

Se ha obtenido así un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, el cual se resuelve.

Efectuando las operaciones indicadas y reduciendo términos semejantes se tiene:

$\{3x - 3y - y + z = 8 \ z - y - 2y + z = 0 \Rightarrow \{- 4y + 4z = 8 \ - 3y + 2z = 0$

Ahora simplificamos la primera ecuación de este sistema dividiendo cada término por 4

$$\{- y + z = 2 \;\; - 3y + 2z = 0$$

Y resolviendo este sistema también por sustitución, pero la *z* en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda ecuación

$z = 2 + y$ (**)

Sustituyendo en la segunda ecuación y resolviendo

$\Rightarrow - 3y + 4 + 2y = 0$

$\Rightarrow - y + 4 = 0$

$\Rightarrow - y =- 4$

$\Rightarrow y = 4$

Sustituyendo este valor de *y* en (**), resulta:

$$z = 2 + y = 2 + 4 = 6$$

Y sustituyendo los valores obtenidos para *y* y *z* en (*) se obtiene

x= $z - y = 6 - 4 = 2$

luego la solución del sistema es: $x = 2 \;\; y = 4 \;\; z = 6$

Ejercicios propuestos:

a.) $\{2x + 3y - 4z = 5 \; 4x - 5y + 2z = 9 \; x + 6y - 5z = 16$

b.) $\{3x + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 7 \; \frac{3x}{4} + \frac{3y}{6} - z =- 1 \; \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{9} = 1$

Método de Igualación para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

Sea resolver el sistema:
$\{x + y - z = 9 \; 2x - y + z = 4 \; x + 2y - z = 2$

1.) Se despeja una misma de las incógnitas en cada una de las ecuaciones del sistema, por ejemplo, la x,

En la 1era ecuación $x = 9 - y - z$ (*)

En la 2da ecuación $x = \frac{4+y-z}{2}$ (**)

En la 3era ecuación $x = 2 - 2y + z$ (***)

Se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas igualando los valores de x en las ecuaciones (*) y (**) y en las ecuaciones (*) y (***), o sea: $\{9 - y - z = \frac{4+y-z}{2}\ 9 - y - z = 2 - 2y + z$

Eliminando el denominador en la primera ecuación del sistema (multiplicando por 2) se obtiene:

$$\{18 - 2y - 2z = 4 + y - z\ 9 - y - z = 2 - 2y + z$$

Agrupando y reduciendo términos semejantes en cada ecuación resulta:

$$\{- 2y - 2z - y + z = 4 - 18\ - y - z + 2y - z = 2 - 9$$

$$\{- 3y - z =- 14\ y - 2z =- 7$$

Resolviendo este sistema se obtiene:

$$y = \frac{-14+z}{-3}; \qquad y =- 7 + 2z$$

Igualando

$$\frac{-14+z}{-3} =- 7 + z$$

Resolviendo

$$- 14 + z =- 3(- 7 + 2z)$$

$$- 14 + z = 21 - 6z$$

$$6z + z = 21 + 14$$

$$7z = 35$$

$$z = \frac{35}{7} = 5$$

Sustituyendo el valor de *z* en la igualdad (****)

$$y = -7 + 2z = -7 + 2·5 = -7 + 10 = 3$$

Y sustituyendo los valores de *y* y *z* en (*)

$$x = 9 - y - z = 9 - 3 - 5 = 1$$

La solución del sistema es: $x = 1 \quad y = 3 \quad z = 5$

Ejercicios propuestos

a.) $\{x + y + z = 35\ 2x - 4y + 2z = 10\ 3x + 2y - 16z = 0$

b.) $\{x + 2y - 3z = -4\ 2x - 3y + 4z = 8\ 3x + y - 2z = -1$

Método de Reducción para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

Sea resolver el sistema:
$\{2x - 3y + 4z = 1\ 4x + 9y - 8z = 3\ x - 6y + 6z = 0$

Para resolver este sistema, es necesario obtener otro sistema que tenga dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas; para ello se elimina una misma incógnita entre las tres ecuaciones, para lo cual hay que hacer iguales coeficientes de esa incógnita en todas las ecuaciones del sistema.

1.) Vamos a eliminar las *x* para ello calculamos el mínimo común múltiplo de los coeficientes de las *x,* es decir, m.cm.(2,4,1)= 4 y así obtenemos el segundo sistema multiplicando la primera ecuación por 2 y la tercera ecuación por 4

II $\{4x - 6y + 8z = 2\ 4x + 9y - 8z = 3\ 4x - 24y + 24z = 0$

2.) **Restando** miembro a miembro la segunda ecuación de la primera en el sistema anterior resulta:

$$\frac{4x-6y+8z=2}{4x+9y-8z=3}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$-\ 15y + 16z =-\ 1 \quad (*)$$

3.) **Restando** miembro a miembro la tercera ecuación de la primera en el sistema II resulta:

$$\frac{4x-6y+8z=2}{4x-24y+24z=0}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$18y - 16z = 2 \quad (**)$$

4.) Las ecuaciones (*) y (**) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el cual se resuelve, o sea:

$$\{-\ 15y + 16z =-\ 1\ 18y - 16z = 2$$

5.) Como los coeficientes de z en este caso han resultado iguales en valor absoluto, se elimina la z sumando miembro a miembro las dos ecuaciones, ya que los coeficientes tienen signos contrario.

$$\frac{-15y+16z=-1}{18y-16z=2}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$3y \qquad\quad = 1$$

$$y = \frac{1}{3}$$

6.) Para obtener el valor de z se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores el valor obtenido para *y,* por ejemplo en la primera, y se resuelve la ecuación de primer grado que se obtiene, o sea: $-\ 15y\ +\ 16z\ =-\ 1 \Longrightarrow -\ 15\cdot\frac{1}{3}\ +\ 16z\ =-\ 1$

$$\frac{-15}{3}\ +\ 16z\ =-\ 1$$

$$-\ 5\ +\ 16z\ =-\ 1$$

$$16z\ =-\ 1\ +\ 5$$

$$16z\ =\ 4$$

$$z\ =\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

7.) Para obtener el valor de *x* se sustituyen los valores obtenidos para *y* y *z* en cualquiera de las ecuaciones del sistema propuesto, por ejemplo en la tercera, o sea:

$$x\ -\ 6y\ +\ 6z\ =\ 0 \Longrightarrow x\ -\ 6\cdot\frac{1}{3}\ +\ 6\cdot\frac{1}{4}\ =\ 0$$

$$x\ -\frac{6}{3}+\frac{6}{4}\ =\ 0$$

$$x\ -\ 2\ +\frac{3}{2}=\ 0$$

$$2x\ -\ 4\ +\ 3\ =\ 0$$

$$2x\ =\ 4\ -\ 3$$

$$2x\ =\ 1$$

$$x\ =\frac{1}{2}$$

Luego la solución del sistema:

$$y\ =\frac{1}{3}\qquad z\ =\frac{1}{4}\qquad x\ =\frac{1}{2}$$

Ejercicios propuestos

a.) $\{x\ +\ y\ +\ z\ =\ 6\ 4x\ -\ 2y\ +\ 3z\ =\ 9\ 9x\ +\ y\ -\ 3z\ =\ 2$

b.) $\{4x - 8y + 6z = 1\ 5x - 7y + 2z = 0\ 3x + 2y + 5y = 5$