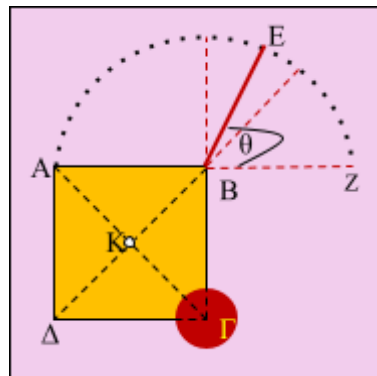


Η τάση επί πίνακι

Στο διπλανό σχήμα βλέπετε μια πινακίδα λεπτή, ομογενή, τετράγωνη, πλευράς d και μάζας M , η οποία μπορεί να στρέφεται περί σταθερό οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδό της στο κέντρο K χωρίς τριβές. Έχουμε πακτώσει στην πινακίδα δίσκο ομογενή, μάζας M , με το κέντρο του στη κορυφή Γ της πινακίδας και το επίπεδό του στην πινακίδα. Έτσι πινακίδα και δίσκος αποτελούν μια κατασκευή. Την κατασκευή μπορούμε να την διατηρούμε σε ισορροπία με τη βοήθεια νήματος BE αμελητέας μάζας μη εκτατό, έτσι ώστε η AB να είναι οριζόντια.



Στις ερωτήσεις 1 έως και 4 να βρείτε τη σωστή απάντηση δικαιολογώντας.

- 1) α) Η σχέση που δίνει την τάση του νήματος σε μια τυχαία θέση αυτού τέτοια ώστε να σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια που ταυτίζεται με την AB είναι:

$$\text{i) } T = \frac{Mg}{\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta} \quad \text{ii) } T = \frac{Mg}{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta} \quad \text{iii) } T = \frac{Mg}{\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$$

- β) Διερευνώντας την δυνατότητα ισορροπίας της κατασκευής με την AB οριζόντια, σε σχέση με τη γωνία θ για $0 \leq \theta \leq 180$, βρήκαμε ότι πρέπει:

$$\text{i) } 45^\circ \leq \theta \leq 180 \quad \text{ii) } 90^\circ \leq \theta \leq 180 \quad \text{iii) } 45^\circ < \theta \leq 180$$

- 2) Αν το όριο θραύσης του νήματος είναι $T_0 = W$ οι τιμές της γωνίας θ , που η τάση φτάνει στο όριό της είναι:

$$\text{i) } 0^\circ, 180^\circ \quad \text{ii) } (0^\circ, 45^\circ) \quad \text{iii) } (90^\circ, 180^\circ)$$

- 3) Η γωνία θ για την οποία η τάση παίρνει την $\min$ τιμή της ($\neq 0$) είναι:

$$\text{i) } 0^\circ \quad \text{ii) } 135^\circ \quad \text{iii) } 90^\circ$$

- 4) Η $\min$ τιμή της τάσης είναι:

$$\text{i) } T_{\min} = \frac{W\sqrt{2}}{2} \quad \text{ii) } T_{\min} = \frac{W}{2} \quad \text{iii) } T_{\min} = W\sqrt{2}$$

- 5) Για ποιες τιμές της γωνίας θ η συνιστώσα F_ψ της δύναμης από τον άξονα θα είναι με φορά προς τα κάτω. Δίδεται ότι αν $\epsilon\phi\theta = 2$ η $\theta = 63,5^\circ$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1) α) Έστω με το νήμα στη θέση BE η κατασκευή ισορροπεί, με την AB οριζόντια.

Έχουμε σχεδιάσει τις εξωτερικές δυνάμεις στην κατασκευή που είναι:

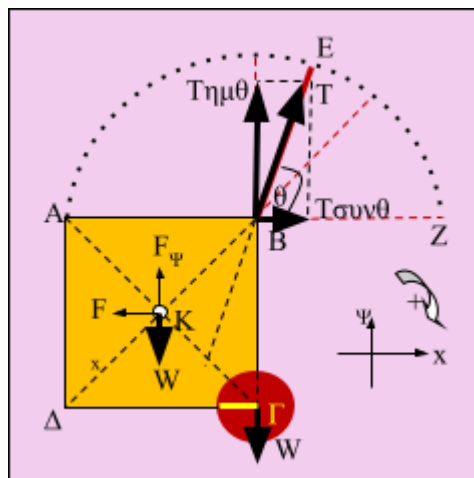
T : η τάση του νήματος με τις συνιστώσες

W, W : τα βάρη πινακίδας και δίσκου

F_x, F_ψ : οι συνιστώσες της δύναμης από τον άξονα στο cm K της πινακίδας.

Αναλύω την T στους χ,ψ

Δεν στρέφεται η κατασκευή, άρα πρέπει:



$$\sum \tau_K = 0 \Rightarrow T \cos \theta \cdot \frac{d}{2} + W \cdot \frac{d}{2} - T \sin \theta \cdot \frac{d}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{Mg}{\sin \theta - \cos \theta} \quad (1) \text{ Ορθή η (i)}$$

β) Με την προϋπόθεση ότι το νήμα πρέπει να υπάρχει με την τάση $T > 0$, από την (1) συνεπάγεται :

$$\sin \theta - \cos \theta > 0 \Rightarrow \sin \theta > \cos \theta \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} > 1 \Rightarrow$$

$$\tan \theta > 1 \Rightarrow \theta > 45^\circ$$

Έτσι λοιπόν :

$$\text{για } 45^\circ < \theta \leq 90 \Rightarrow \sin \theta > \cos \theta \Rightarrow T > 0 \text{ και}$$

$$\text{για } 90 \leq \theta \leq 180 \Rightarrow \sin \theta > 0 \text{ και } \cos \theta < 0 \text{ άρα } (-\cos \theta) > 0 \xrightarrow{(1)} T > 0$$

άρα για $45^\circ < \theta \leq 180$ έχουμε $T > 0$ και δυνατές καταστάσεις ισορροπίας

Ορθή η iii)

Παρατήρηση

$$\theta = 45^\circ \text{ από την (1)} \Rightarrow T = \frac{W}{0} \Rightarrow T \rightarrow \infty$$

Αν

το οποίο σημαίνει πως το όποιο νήμα

δεν μπορεί να αντέξει και θα σπάσει . Πάντως το σίγουρο είναι πως η κατασκευή μας δεν θ' αντέξει.

2)

$$\text{Από την (1) για } T = W \Rightarrow \frac{W}{\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta} = W \Rightarrow \eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta = 1 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\theta - 1 = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \eta\mu\theta - 1 = \pm\sqrt{1 - \eta\mu^2\theta} \Rightarrow (\eta\mu\theta - 1)^2 = 1 - \eta\mu^2\theta \Rightarrow$$

$$\eta\mu^2\theta - 2\eta\mu\theta + 1 = 1 - \eta\mu^2\theta \Rightarrow 2\eta\mu^2\theta - 2\eta\mu\theta = 0 \Rightarrow \eta\mu\theta(\eta\mu\theta - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\theta - 1 = 0 \Rightarrow \eta\mu\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90^\circ \text{ Δεκτή}$$

$$\eta\mu\theta = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \theta = 0^\circ & \text{απορρίπτεται αφού } \theta < 45^\circ \\ \theta = 180^\circ & \text{Δεκτή} \end{matrix} \quad \text{Ορθή η iii)}$$

3)

Από την (1) $\Rightarrow$ ότι η T παίρνει την ελάχιστη τιμή της ($\neq 0$) όταν ο παρ/στής πάρει την max τιμή του, έστω κ . Έτσι :

$$\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta = \kappa \Rightarrow \eta\mu\theta - (\pm\sqrt{1 - \eta\mu^2\theta}) = \kappa \Rightarrow \pm\sqrt{1 - \eta\mu^2\theta} = \eta\mu\theta - \kappa \Rightarrow$$

$$1 - \eta\mu^2\theta = \eta\mu^2\theta - 2\kappa\eta\mu\theta + \kappa^2 \Rightarrow 2\eta\mu^2\theta - 2\kappa\eta\mu\theta + \kappa^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Πρέπει } \Delta \geq 0 \Rightarrow 4\kappa^2 - 8(\kappa^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow \kappa^2 \leq 2 \Rightarrow \kappa \leq \pm\sqrt{2} \Rightarrow \kappa_{\max} = \sqrt{2} \quad (3)$$

Τότε από την (2) $\Rightarrow$

$$\eta\mu\theta = -\frac{-2\kappa}{4} \xrightarrow{(3)} \eta\mu\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ \text{ απορ/ται}, \theta = 135^\circ \text{ Ορθή η ii)}$$

4)

$$\text{Από την (1)} \Rightarrow T = \frac{W}{\eta\mu 135 - \sigma\upsilon\nu 135} = \frac{W}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{W}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\text{Από την (1)} \Rightarrow T = \frac{W}{\eta\mu 135 - \sigma\upsilon\nu 135} = \frac{W}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{W}{\sqrt{2}} \Rightarrow T = \frac{W\sqrt{2}}{2} \text{ ορθή (i)}$$

5)

Στον άξονα ψ δρουν οι δυνάμεις $T\eta\mu\theta$, $2W$ και F_ψ . Θα είναι η F_ψ με φορά προς τα κάτω αν :

$$\Sigma F_\psi = 0 \Rightarrow F_\psi + T\eta\mu\theta - 2W = 0 \Rightarrow F_\psi = -T\eta\mu\theta + 2W < 0 \Rightarrow T\eta\mu\theta > 2W$$

$$\xrightarrow{(i)} \frac{W}{\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta} \eta\mu\theta > 2W \Rightarrow \eta\mu\theta > 2\eta\mu\theta - 2\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \eta\mu\theta < 2\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \epsilon\phi\theta < 2$$

$$\theta < 63,5^\circ$$

Είχαμε όμως βρει ότι : $45 < \theta \leq 180$ άρα τελικά πρέπει : $45^0 < \theta < 63,5^0$

Παντελεήμων

Παπαδάκης

19/05/2026