

О Т В Е Т Ы
II этапа (районного, городского)
республиканской олимпиады
по математике
для учащихся 8 – 11 классов
учреждений образования Витебской области
(2012-2013 учебный год)

ВИТЕБСК • 2012
ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ

При проверке и оценивании работ учащихся жюри руководствуется следующими критериями оценки:

1. Решение каждой задачи оценивается **7 баллами**. Жюри не имеет права изменять цену задачи. Все оценки должны быть **целыми** числами. Задача считается решенной, если решение оценено не ниже, чем в 5 баллов и нерешенной, если оценка не превосходит 3 баллов. Оценка в 4 балла может толковаться по-разному, в зависимости от конкретной ситуации.

2. Оценки выставляются на основе следующих критериев:

Оценка в баллах	Критерии оценки
7	Верное решение
6	Верное решение с недочетами
5	Решение в целом верно, но неполно или содержит не принципиальные ошибки
4	Рассуждения содержат большую часть решения, но в них есть существенные пробелы или ошибки
1 – 3	Решения в целом нет, но есть более или менее существенное продвижение в верном направлении
0	Решение неверно или отсутствует

Решение считается **неполным**, если:

- оно содержит все необходимые идеи, но не доведено до конца;
- оно в целом верное, но содержит более или менее легко устранимые пробелы, т.е. явно или скрыто опирается на недоказанные утверждения, которые нельзя считать известными или очевидными;
- оно требует разбора нескольких возможных случаев, большая часть которых рассмотрена, но некоторые, аналогичные рассмотренным, упущены.

3. При оценке решения на олимпиаде учитываются только его *правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность*. Нельзя снижать оценку за нерациональность решения (кроме редких случаев, когда это прямо предусмотрено указаниями по проверке задачи), нетиповое его оформление, исправления, пометки и т.п.

4. Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего – логические) ошибки от технических. К последним относятся, например, вычислительные ошибки в невычислительной задаче (алгебраические ошибки в вычислительной задаче часто являются

принципиальными). Технические ошибки, не искажающие логику решения, как правило, следует относить к недочетам.

5. Мы постоянно ориентируем школьников на необходимость обоснования решений. Однако не следует требовать от них большего уровня строгости изложения, чем принято в школьной практике. На олимпиаде умение хорошо *догадываться* должно цениться выше, чем умение хорошо излагать решение.

6. Ответ, найденный логическим путем, обычно оценивается выше, чем найденный слепым подбором.

Ответы, решения, указания

8 класс

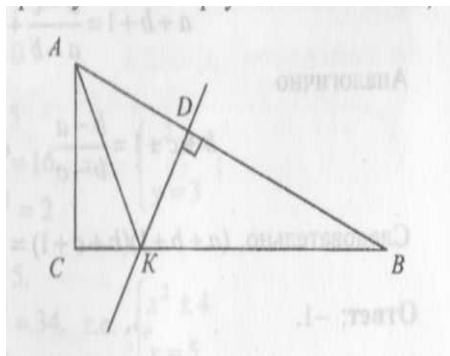
1. Ответ: нет.

Проанализируем уравнение с точки зрения четности и нечетности. Если оба числа x и y четные, то их $НОД$ и $НОК$ также четные, так что сумма четырех слагаемых (четных чисел) тоже должна быть четной. Если они оба нечетные, то их $НОД$ и $НОК$ нечетные, а сумма четырех нечетных чисел – четная. Наконец, если одно из чисел x и y четное, а второе – нет, то $НОД$ – нечетный, а $НОК$ – четное, сумма же опять-таки четна! Таким образом, нужных чисел x и y не существует.

2. Ответ: 100.

Решение. Числа, входящие в условие задачи, написаны не по десятичной системе. Пусть основание неизвестной системы равно x . Число 84 означает тогда 8 единиц второго разряда и 4 единицы первого, т.е. «84» = $8x + 4$. Число «54» = $5x + 4$. В десятичной системе счисления $8 \cdot 8 = 64 = 6 \cdot 10 + 4$. Значит, $5x + 4 = 64$, откуда $x = 12$. Числа написаны в двенадцатиричной системе и «84» = $8 \cdot 12 + 4 = 100$.

3.



Используя свойства угла 30° в прямоугольных треугольниках ABC , BDK , ACK , признаки равенства треугольников и свойства серединного перпендикуляра к отрезку, имеем: $CK + DK = \frac{1}{2} \frac{1}{2} BK$, откуда $DK = \frac{1}{3} \frac{1}{3} BC$.

4. Ответ: $\frac{\pi^2}{8} \frac{\pi^2}{8}$.

Решение. Пусть $S = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$, тогда $\frac{\pi^2}{6} \frac{\pi^2}{6} = (1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \dots) = S + \frac{1}{4} (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots) = S + \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} \frac{\pi^2}{6}$.

Значит, $S = \frac{\pi^2}{6} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\pi^2}{8}$.

5. Ответ: 20 лоскутов.

Пусть на мяче x белых лоскутов, $(32 - x)$ – черных лоскутов. Тогда границ белых с черными $5(32 - x) = 3x$, откуда $x = 20$.

9 класс

1. Ответ: $\frac{33}{88}$ и $\frac{55}{1313}$ или $\frac{55}{88}$ и $\frac{88}{1313}$

Решение.

Пусть первая дробь равна $\frac{x}{88}$, а вторая — $\frac{y}{1313}$. Тогда разность между большей и меньшей из них равна $\frac{|13x-8y|}{104}$. В числителе полученной дроби стоит целое положительное число. Поэтому она не может быть меньше $\frac{1}{104}$. А быть равной $\frac{1}{104}$ — может. Для этого нужно, чтобы числитель был равен единице. Это выполняется, если, например, $x = 3$, $y = 5$ (или $x = 5$, $y = 8$).

2. Доказательство. Первый обмен однозначен, 1 диллер придется поменять на 10 даллеров. А теперь уже, возможно, не все даллеры будут обменены. Пусть финансист обменяет p даллеров на $10p$ диллеров, и у него останется $10 - p$ даллеров. Разность между числом диллеров и числом даллеров равна $11p - 10 = 11(p - 1) + 1$. n диллеров поменяем на $10n$ даллеров. Тогда будет $10 - p + 10n$ даллеров и $10p - n$ диллеров. Снова посчитаем разность между числом диллеров и числом даллеров. Имеем: $11p - 11n - 10 = 11(p - n - 1) + 1$. Опять получился остаток 1 при делении на 11. А ведь рассуждения проведены в общем виде. Значит, инвариант — остаток 1 от деления на 11 разности между числом диллеров и числом даллеров у финансиста. А если число диллеров равно числу даллеров, то разность равна 0, и остаток от деления на 11 равен 0. Значит, количество даллеров у финансиста никогда не сравняется с количеством диллеров.

3. Ответ: 15 см

1) Пусть диаметр $AB = 25$ см, хорда $AC = 24$ см, хорда $BD = 20$ см, $O = AC \cap BD$, $BO = x$ см, $CO = y$ см. Тогда $AO = 24 - y$, $DO = 20 - x$. Так как $DO \cdot OB = AO \cdot CO$, то $(20 - x)x = (24 - y)y$.

2) По теореме Пифагора из треугольника ABC имеем $BC^2 = 25^2 - 24^2 = 49$, а из треугольника OCB получаем $x^2 = y^2 + 49$.

3) Решаем систему уравнений, составленную из предыдущих пунктов. В результате получаем систему двух уравнений

$$\left(\frac{24y+49}{20}\right)^2 - \left(\frac{24y+49}{20}\right)^2 = y^2 + 49 \text{ и } x = \frac{24y+49}{20} - \frac{24y+49}{20}.$$

Условию задачи удовлетворяет только положительное значение $y = 5,25$, тогда $x = 8,75$, т.е. $CO = 5,25$ см, $BO = 8,75$ см.

3) Заметим: $\triangle DOC \sim \triangle BOC \sim \triangle AOB$ (по двум углам). Отсюда $\frac{DC}{AB} = \frac{DO}{AO}$, т.е. $\frac{DC}{25} = \frac{20-8,75}{24-5,25}$ и $DC = 15$ см.

4. Ответ: $x < y < z$.

Так как $a < b < c < d$, то $y - x = ab + cd - ac - bd = (a - d)(b - c) > 0$, $z - y = ac + bd - ad - bc = (a - b)(c - d) > 0$. Таким образом, $x < y < z$.

5. Решение. Пусть x, y – искомые числа. По условию $\frac{x+y}{2} : \frac{x+y}{2} = \sqrt{xy} : \sqrt{xy} = 25 : 24$, т.е. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{25}{12} + \frac{25}{12}$. Положим $n = \sqrt{\frac{x}{y}}$, тогда $n + 1/n = 25/12$, т.е. $n^2 - \frac{25}{12}n + 1 = 0$. Решая это квадратное уравнение находим $n_1 = \frac{4}{3}$, $n_2 = \frac{3}{4}$. Таким образом, $x:y = 16:9$ или $9:16$.

10 класс

1. Доказательство. Число $a + b = a + 2 - 2 + b = a + 2 - 2 + b + 35 - 35 = (a + 2) - (35 - b) + 33$. Каждое слагаемое делится на 11, следовательно, вся сумма делится на 11.

2. Подберем два числа a и b так, чтобы иметь равенство:

$x^3 + px + g = x^3 + a^3 + b^3 - 3abx$. Тогда $a^3 + b^3 = g$ и $a^3 b^3 = -\frac{p^3}{27}$ или

$a^3 b^3 = -\frac{p^3}{27}$. Отсюда по теореме Виета $a^3 = \frac{g}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{g^2}{4}}$ и $b^3 = \frac{g}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{g^2}{4}}$

$$\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{g^2}{4}} \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{g^2}{4}} \sqrt{\frac{g^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \sqrt{\frac{g^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad b^3 = \frac{g}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{g^2}{4}}$$

$$\frac{g}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{g^2}{4}}.$$

Теперь из тождества имеем

$$x^3 + px + g = x^3 + a^3 + b^3 - 3abx = (a + b + x)(a^2 + b^2 + x^2 - ab - ax - bx),$$

откуда решения исходного уравнения $x_1 = -a - b$ и решение квадратного уравнения $x^2 - (a + b)x + a^2b^2 - ab = 0$.

Примечание. Результат этой задачи позволяет решить любое уравнение третьей степени (т.е. получить *формулу Кардано*).

Уравнение $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$ сводится к уравнению задачи

заменой $y = x - \frac{A}{3}$.

3. Ответ: $(\sqrt{S_1} \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \sqrt{S_2})^2$.

Решение. Треугольники AOD и BOC подобны, следовательно,

$AD : BC = \sqrt{S_1} \sqrt{S_1} : \sqrt{S_2} \sqrt{S_2}$. Площади треугольников ABC и DBC равны (у них общее основание и равные высоты). Тогда имеем следующие равенства для площадей треугольников ABO и DCO:

$$S_{ABO} = S_{ABC} - S_{BOC} = S_{DBC} - S_{BOC} = S_{DCO}.$$

Обозначим площадь треугольников ABO и DCO через S . Тогда $S_{ABD} = S_1 + S$, $S_{BCD} = S_2 + S$. Пусть h – высота трапеции ABCD. Тогда

$$(S_1 + S) : (S_2 + S) = S_{ABD} : S_{BCD} = (0,5AD \cdot h) : (0,5BC \cdot h) = AD : BC = \sqrt{S_1} \sqrt{S_1} : \sqrt{S_2} \sqrt{S_2}.$$

Или $S_1 \sqrt{S_2} \sqrt{S_2} + S \sqrt{S_2} \sqrt{S_2} = S_2 \sqrt{S_1} + S \sqrt{S_1}$

$$\sqrt{S_1} + S \sqrt{S_1}, \quad \text{откуда } S(\sqrt{S_2} \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} \sqrt{S_1}) = \sqrt{S_1 S_2} \sqrt{S_1 S_2}$$

$$(\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}), \quad S = \sqrt{S_1 S_2} \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}, \quad S = \sqrt{S_1 S_2}.$$

Получаем, что

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} \sqrt{S_1 S_2} = (\sqrt{S_1} \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \sqrt{S_2})^2.$$

4. Ответ: $x < y < z$.

Так как $a < b < c < d$, то $y - x = ab + cd - ac - bd = (a - d)(b - c) > 0$,
 $z - y = ac + bd - ad - bc = (a - b)(c - d) > 0$. Таким образом, $x < y < z$.

5. Ответ: 145, 150, 295. Основание другой системы 15.

Пусть x, y, z – цифры сотен, десятков, единиц, c – основание новой системы счисления. Тогда $2(100x + 10y + z) = c^2x + cy + z$, откуда $(200 - c^2)x + (20 - c)y + z = 0$.

Если $0 < c \leq 14$, то $(200 - c^2)x + (20 - c)y + z \geq 4x + 6y + z \geq 4$,

Если же $c \geq 16$,

то $(200 - c^2)x + (20 - c)y + z \leq -56x + 4y + z \leq -56 + 36 + 9 = -11$.

Поэтому, $c = 15$. Подставляя его в уравнение, имеем:

$$-25x + 5y + z = 0. \text{ Отсюда } z = 0 \text{ или } 5.$$

11 класс

- Доказательство. Число $a + b = a + 2 - 2 + b = a + 2 - 2 + b + 35 - 35 = (a + 2) - (35 - b) + 33$. Каждое слагаемое делится на 11, следовательно, вся сумма делится на 11.
- По теореме Виета имеем равенства:
 $a + b = -p, \quad ab = 1, \quad c + d = -g, \quad cd = 1$, из которых получаем
 $(a - c)(b - c)(a + d)(b + d) = g^2 - p^2$.
- 1) Проведем в треугольнике ABC высоты AD, BE и CH, построим треугольник EHD и выделим равные углы: $\angle DAC = \angle CBE = \alpha$,
 $\angle DAB = \angle BCH = \beta, \angle ACH = \angle ABE = \gamma$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами)

2) Точки O, D, C, E лежат на окружности диаметра OC, так как $\angle ODC$ и $\angle OEC$ – прямые. Аналогично получаем, что около четырехугольников OHAЕ и OHBD можно описать окружности с диаметром OA и OB соответственно. Отсюда следует равенство вписанных углов:

$\angle OED = \angle OCB = \beta$, $\angle ODE = \angle OCE = \gamma$, $\angle OHD = \angle OBD = \alpha$, $\angle ODH = \angle OBH = \gamma$, $\angle ONE = \angle OAE = \alpha$, $\angle OEH = \angle OAH = \beta$. Таким образом, равенство углов OHD и ONE, OEH и OED, ODE и ODH доказывает принадлежность биссектрис треугольника EHD высотам треугольника ABC.

3) Выразим углы треугольника EHD через углы A, B, C. Имеем: $\angle EHD = 2\alpha$, но из треугольника BEC $\alpha = 90^\circ - \angle C$, т.е. $2\alpha = 180^\circ - 2\angle C$. Так как из треугольника ACH $\gamma = 90^\circ - \angle A$, то $\angle HDE = 2\gamma = 180^\circ - 2\angle A$. Аналогично из треугольника CHB $\beta = 90^\circ - \angle B$, и тогда $\angle HED = 2\beta = 180^\circ - 2\angle B$.

4. Положим $x = (a^2 + b^2):ab$. Тогда $x > 2$ (по неравенству о средних),

поэтому достаточно доказать, что при $x \geq 2$ верно, что $\frac{x+1}{x} \geq 2,5$, т.е. что $x^2 - 2,5x + 1 = (x-2)(x-0,5) \geq 0$.

5. Ответ: 145, 150, 295. Основание другой системы 15.

Пусть x, y, z – цифры сотен, десятков, единиц, c – основание новой системы счисления. Тогда $2(100x + 10y + z) = c^2x + cy + z$, откуда $(200 - c^2)x + (20 - c)y + z = 0$.

Если $0 < c \leq 14$, то $(200 - c^2)x + (20 - c)y + z \geq 4x + 6y + z \geq 4$,

Если же $c \geq 16$,

то $(200 - c^2)x + (20 - c)y + z \leq -56x + 4y + z \leq -56 + 36 + 9 = -11$.

Поэтому, $c = 15$. Подставляя его в уравнение, имеем:

$-25x + 5y + z = 0$. Отсюда $z = 0$ или 5.