

BAB II

PERSAMAAN DIFERENSIAL TINGKAT SATU BERDERAJAT SATU

A. Persamaan Diferensial Linier Order Satu Homogen

Persamaan diferensial biasa order satu dapat dinyatakan dalam :

$$F(x, y) = \frac{dy}{dx}$$

atau dalam bentuk turunan

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

Contoh . 1 $\frac{dy}{dx} + \frac{2y+x}{y-2x} = 0$

dapat ditulis :

$$(2y + x)dx + (y - 2x)dy = 0$$

dimana,

$$M(x, y) = 2y + x, \text{ dan } N(x, y) = y - 2x.$$

Contoh . 2 $\frac{dy}{dx} = \sin \sin x + y$

dapat ditulis

$$dy = (\sin \sin x + y) dx$$

atau

$$(\sin \sin x + y)dx - dy = 0$$

dimana,

$$M(x, y) = \sin \sin x + y ; \quad \text{ dan } N(x, y) = -1.$$

Persamaan diferensial pada persamaan (1) dan penyelesaian-nya adalah menafsirkan $\frac{dy}{dx}$ atau y' sebagai kemiringan dari garis singgung pada lengkungan (kurva) penyelesaian di titik (x, y) .

B. Penyelesaian Langsung

Persamaan diferensial terpisah dalam bentuk implisit :

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

Penyelesaian umum suatu persamaan diferensial terpisah sebagai berikut :

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$$

c adalah konstanta sebarang

Contoh . 3 Tentukan penyelesaian umum dari

$$x dx - 6y^2(2y^3 + 5)dy = 0$$

Penyelesaian 3 : persamaan di atas pada contoh 3 sudah terpisah, maka dapat di integralkan sebagai berikut :

$$\int x dx - \int 6y^2(2y^3 + 5)dy = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(2y^3 + 5)^2 = C_1$$

Catatan :

$$\int 6y^2(2y^3 + 5)dy = \int a da = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(2y^3 + 5)^2$$

Misalkan $a = 2y^3 + 5$, maka $da = 6y^2 dy$

$$\text{PUPD : } x^2 + (2y^3 + 5)^2 = 2C_1 \quad \text{atau} \quad x^2 + (2y^3 + 5)^2 = C \quad \blacksquare \quad ; 2C_1 = C$$

Contoh . 4 Tentukan persamaan diferensial $\left(\frac{2x}{x^2+1} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y+1}\right)dy = 0$

Penyelesaian 4 : perubah x dan y sudah terpisah, maka dapat diintegralkan sebagai berikut :

$$\int \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx + \int \left(\frac{1}{y+1}\right)dy = 0$$

$$\int \left(\frac{1}{x^2+1}\right)d(x^2 + 1) + \int \left(\frac{1}{y+1}\right)dy = C$$

$$\ln \ln(x^2 + 1) + \ln \ln(y + 1) = C$$

$$\ln(x^2 + 1)(y + 1) = C \quad \text{atau} \quad (x^2 + 1)(y + 1) = e^C$$

$$\text{Penyelesaian umum PD : } (x^2 + 1)(y + 1) = C \quad \blacksquare \quad \text{dimana : } e^C = C$$

C. Penyelesaian Peubah yang dapat Dipisahkan

Jika persamaan (1) dapat ditransformasikan, maka persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Faktor pengintegral adalah $\frac{1}{f_2(x)g_1(y)}$ maka didapat

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(xy)}dy = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

Jika persamaan (2) tidak eksak namun persamaan (3) adalah eksak sehingga teknik penyelesaiannya menyesuaikan dan dapat dilakukan integral langsung dalam bentuk berikut ini :

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(xy)}dy = C$$

Contoh . 5 Selesaikan persamaan diferensial berikut ini :

$$(1 + x)ydx + x dy = 0$$

Penyelesaian 5 :

$$(1 + x)ydx + x dy = 0$$

Faktor Integrasi adalah $\frac{1}{xy}$, persamaan menjadi :

$$\frac{1}{xy}(1 + x)ydx + \frac{1}{xy}x dy = 0$$

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0$$

Karena persamaan sudah terpisah maka dapat diintegralkan :

$$\int \left(\frac{1+x}{x}\right)dx + \int \frac{1}{y}dy = C$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \int \frac{1}{y}dy = C$$

$$\ln \ln x + x + \ln y = C$$

$$\ln \ln xy + x = C$$

$$\ln xy + \ln \ln e^x = e^C$$

$$xye^x = C \quad \blacksquare \quad e^C = C$$

Penyelesaian umum persamaan diferensial (PUPD) : $xye^x = C$

D. Selesaikan persamaan diferensial berikut ini : $y' + xy = 3$

Penyelesaian 17 :

$$y' + xy = 3y$$

di rubah menjadi

$$\frac{dy}{dx} + xy = 3y$$

$$dy + xy dx = 3y dx$$

$$dy + (xy - 3y)dx = 0$$

$$dy + y(x - 3)dx = 0$$

Faktor integral adalah $\frac{1}{y}$, maka persamaan tereduksi menjadi

$$\frac{1}{y}dy + \frac{1}{y}[y(x - 3)]dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} + (x - 3)dx = 0$$

Karena persamaan diferensial sudah terpisah, maka dapat di integralkan :

$$\int \frac{dy}{y} + \int (x - 3)dx = C$$

$$\ln \ln y + \frac{1}{2} (x - 3)^2 = C \quad \text{dikali 2 diperoleh}$$

$$y + (x - 3)^2 = 2C \quad \Rightarrow \quad \ln \ln y^2 + \ln \ln e^{(x-3)^2} = \ln e^{2C}$$

$$\text{PUPD : } y^2 e^{(x-3)^2} = C \quad \text{atau} \quad y^2 = C e^{-(x-3)^2} \quad \ln e^{2C} = C$$

E. Selesaikan sistem persamaan diferensial berikut ini : Rumus Volterra

$$\frac{dx}{dt} = x(a_1 + a_2 y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(b_1 + b_2 x)$$

Fungsi tersebut menggambarkan persaingan dua spesies yang hidup dilingkungan yang disediakan.

Penyelesaian 7 . Diketahui bahwa $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(b_1 + b_2 x)}{x(a_1 + a_2 y)}$$

$$dy = \left[\frac{y(b_1 + b_2 x)}{x(a_1 + a_2 y)} \right] dx$$

Faktor integrase : $\frac{1}{y(a_1 + a_2 y)}$

$$\left[\frac{1}{y(a_1 + a_2 y)} \right] dy = \left[\frac{1}{y(a_1 + a_2 y)} \right] \left[\frac{y(b_1 + b_2 x)}{x(a_1 + a_2 y)} \right] dx$$

$$\left[\frac{1}{y(a_1 + a_2 y)} \right] dy = \left[\frac{1}{x(b_1 + b_2 x)} \right] dx$$

Persamaan diferensial sudah terpisah dalam bentuk eksplisit, maka

$$\int \left[\frac{1}{y(a_1 + a_2 y)} \right] dy = \int \left[\frac{1}{x(b_1 + b_2 x)} \right] dx$$

$$\int \left[\frac{A}{y} + \frac{B}{(a_1 + a_2 y)} \right] dy = \int \left[\frac{D}{x} + \frac{E}{(b_1 + b_2 x)} \right] dx$$

Dicari nilai A , dan B diperoleh :

$$A(a_1 + a_2 y) + By = 1$$

$$Aa_1 + Aa_2 y + By = 1$$

$$Aa_1 = 1$$

$$Aa_2 + B = 0$$

$$\text{Jika } Aa_1 = 1 \text{ maka } A = \frac{1}{a_1}$$

$$\text{Jika } Aa_2 + B = 0 \text{ maka } \frac{1}{a_1}a_2 + B = 0, B = -\frac{a_2}{a_1}$$

Diperoleh $A = \frac{1}{a_1}$ dan $B = -\frac{a_2}{a_1}$, lalu substitusikan ke persamaan

$$\int \left[\frac{A}{y} + \frac{B}{(a_1 + a_2 y)} \right] dy = \int \left[\frac{\frac{1}{a_1}}{y} + \frac{-\frac{a_2}{a_1}}{(a_1 + a_2 y)} \right] dy = \int \frac{1}{a_1 y} dy - \int \frac{a_2}{a_1(a_1 + a_2 y)} dy$$

$$\frac{1}{a_1} \ln \ln y - \frac{a_2}{a_1} \ln \ln(a_1 + a_2 y) \left(\frac{1}{a_2} \right) = \frac{1}{a_1} \ln \ln y - \frac{1}{a_1} \ln(a_1 + a_2 y) + C$$

Sama-sama dikalikan factor $\frac{1}{a_1}$, maka :

$$\ln \ln y - \ln(a_1 + a_2 y) + \frac{1}{a_1} C = \ln \frac{y}{(a_1 + a_2 y)} + C$$

$$\int \left[\frac{A}{y} + \frac{B}{(a_1 + a_2 y)} \right] dy = \frac{y}{(a_1 + a_2 y)} + C \quad \blacksquare$$

Dicari nilai D dan E sebagai berikut :

$$\int \left[\frac{1}{x(b_1 + b_2 x)} \right] dx = \int \left[\frac{D}{x} + \frac{E}{(b_1 + b_2 x)} \right] dx =$$

$$D(b_1 + b_2 x) + Ex = 1$$

$$Db_1 + Db_2 x + Ex = 1$$

$$Db_1 = 1$$

$$Db_2 + E = 0$$

$$\text{Jika } Db_1 = 1 \text{ maka } D = \frac{1}{b_1}$$

$$\text{Jika } Db_2 + E = 0 \quad \text{maka } \frac{1}{b_1}b_2 + E = 0, E = -\frac{b_2}{b_1}$$

Diperoleh $D = \frac{1}{b_1}$ dan $E = -\frac{b_2}{b_1}$, lalu substitusikan ke persamaan

$$\int \left[\frac{D}{x} + \frac{E}{(b_1 + b_2 x)} \right] dx = \int \left[\frac{\frac{1}{b_1}}{x} + \frac{-\frac{b_2}{b_1}}{(b_1 + b_2 x)} \right] dx = \int \frac{1}{b_1 x} dx - \int \frac{b_2}{b_1(b_1 + b_2 x)} dx$$

$$\frac{1}{b_1} \ln \ln x - \frac{b_2}{b_1} \ln \ln (b_1 + b_2 x) \left(\frac{1}{b_2} \right) = \frac{1}{b_1} \ln \ln x - \frac{1}{b_1} \ln (b_1 + b_2 x) + C$$

Sama-sama dikalikan faktor $\frac{1}{b_1}$, maka :

$$\ln \ln x - \ln (b_1 + b_2 x) + \frac{1}{b_1} C = \ln \frac{x}{(b_1 + b_2 x)} + C$$

$$\int \left[\frac{D}{x} + \frac{E}{(b_1 + b_2 x)} \right] dx = \frac{x}{(b_1 + b_2 x)} + C \quad \blacksquare$$

Jadi

$$\int \left[\frac{1}{y(a_1 + a_2 y)} \right] dy = \int \left[\frac{1}{x(b_1 + b_2 x)} \right] dx$$

$$\frac{y}{(a_1 + a_2 y)} - \frac{x}{(b_1 + b_2 x)} = C \quad \blacksquare$$

F. Penyelesaian Homogen

Suatu persamaan diferensial homogen adalah suatu persamaan dari bentuk :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Persamaan diferensial dikatakan homogen jika $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ adalah fungsi-fungsi homogen dan berderajat sama. Substitusi $y = vx$; $dy = v dx + x dv$ dan PD Homogen dapat diubah menjadi PD dengan variabel terpisah. Atau $x = vy \Rightarrow dx = y dv + v dy$

Suatu fungsi $f(x, y)$ disebut homogen berpangkat n jika $f(x, y) = {}^n f(x, y)$. Disini diberikan contoh-contoh persamaan diferensial homogen

Contoh . 3 Diberikan persamaan $f(x, y) = x^2 + xy$ adalah homogen berpangkat 2

Bukti :

$$f(x, y) = x^2 + xy$$

$$f(x, y) = (x)^2 + (x)(y)$$

$$= {}^2 x^2 + {}^2 (xy) = {}^2 (x^2 + xy) = {}^2 f(x, y) \quad \blacksquare$$

Contoh . 4 Diberikan persamaan $\sin \frac{x}{y}$ adalah homogen tingkat Satu

Contoh-contoh persamaan diferensial homogen dan penyelesaiannya :

Contoh . 5 Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}; \quad y(1) = 2$$

Penyelesaian 5

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$2xy \, dx - (x^2 - y^2) \, dy = 0 \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

Tranformasikan $a = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ax \Rightarrow dy = a \, dx + x \, da$

Lalu substitusikan a dan $dy = a \, dx + x \, da$ ke pers. (5. 1), diperoleh :

$$2xy \, dx - (x^2 - y^2) \, dy = 0 \quad \text{faktor pengali } \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} (2xy \, dx) - \frac{1}{x^2} (x^2 - y^2) \, dy = 0$$

$$2 \frac{y}{x} \, dx - \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \right) dy = 0$$

$$2a \, dx - \left(1 - a^2 \right) (a \, dx + x \, da) = 0$$

$$\frac{1}{x} \, dx - \frac{(1-a^2)}{a(a^2+1)} \, da = 0 \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

Persamaan (5.2) sudah terpisah, maka persamaan diferensial dapat di integral sebagai berikut :

$$\int \frac{1}{x} \, dx - \int \frac{(1-a^2)}{a(a^2+1)} \, da = 0$$

$$\ln x - \int \frac{(1-a^2)}{a(a^2+1)} \, da = C$$

$$\ln \ln x - \left[- \ln \ln (a^2 + 1) + \ln \ln a \right] = C$$

$$\ln \ln x + \ln \ln (a^2 + 1) - \ln \ln a = C$$

$$\ln \ln \frac{x(a^2+1)}{a} = C \quad ; \quad \frac{x(a^2+1)}{a} = C \quad ; \quad C = e^C$$

Jika $a = \frac{y}{x}$, maka

$$\frac{x(a^2+1)}{a} = C \Rightarrow \frac{x\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)}{\frac{y}{x}} = \frac{\frac{y^2}{x}+x}{\frac{y}{x}} = \frac{y^2+x^2}{y} = C$$

PUPD : dengan syarat $y(1) = 2$ artinya $x = 1$ dan $y = 2$ lalu disubstitusikan diperoleh :

$$\frac{y^2+x^2}{y} = \frac{(2)^2+(1)^2}{2} = \frac{5}{2} = C$$

Penyelesaian partikular persamaan diferensial (PPPD)

$$\frac{y^2+x^2}{y} = \frac{5}{2} \quad \text{atau} \quad 2y^2 + 2x^2 - 5y = 0 \quad \blacksquare$$

Catatan :

$$\int \frac{(1-a^2)}{a(a^2+1)} da = \int \frac{Aa+B}{a^2+1} da + \int \frac{C}{a} da$$

$$(Aa + B)a + C(a^2 + 1) = 1 - a^2$$

$$Aa^2 + Ba + Ca^2 + C = 1 - a^2$$

$$(A + C)a^2 + Ba + C = 1 - a^2$$

$$A + C = -1 \quad ; B = 0 \quad ; \quad C = 1$$

Jika $C = 1$ maka $A + C = -1 \Rightarrow A + 1 = -1 \quad ; A = -2$

$$\int \frac{Aa+B}{a^2+1} da + \int \frac{C}{a} da = \int \frac{(-2)a+0}{a^2+1} da + \int \frac{1}{a} da =$$

$$\int \frac{(-2)a}{a^2+1} da + \int \frac{1}{a} da = \int -\frac{1}{a^2+1} d(a^2 + 1) + \ln \ln a$$

$$- \ln \ln (a^2 + 1) + \ln \ln a = C$$

$$\frac{a}{a^2+1} = C \quad \blacksquare$$

$$(\text{****}) \text{Tranformasikan } z = \frac{x}{y} \Rightarrow x = yz \Rightarrow dx = zdy + ydz$$

$$2xy dx - (x^2 - y^2)dy = 0 \quad \text{faktor pengali } \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{2xy dx - (x^2 - y^2)dy}{y^2} = 0$$

$$2\left(\frac{x}{y}\right)dx - \left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right)dy = 0$$

$$2z(zdy + ydz) - (z^2 - 1)dy = 0$$

$$2z^2 dy + 2zy dz - z^2 dy + dy = 0$$

$$z^2 dy + dy + 2zy dz = 0$$

$$(z^2 + 1)dy + 2zy dz = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{2z}{(z^2+1)}dz = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{2z}{(z^2+1)}dz = 0$$

$$\ln \ln y + \ln \ln (z^2 + 1) = c_1$$

$$y(z^2 + 1) = C$$

$$y\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) = C$$

$$y(x^2 + y^2) = Cy^2$$

$$\frac{y^2+x^2}{y} = C$$

jawaban sama (item)

Catatan :

$$\int \frac{2z}{(z^2+1)}dz = \int \frac{2z}{(z^2+1)} \frac{d(z^2+1)}{2z}$$

Contoh . 6 Cari penyelesaian persamaan diferensial dari

$$(x + 2y)dx + (2x + 3y)dy = 0 ; y(2) = 1$$

Penyelesaian 6 : persamaan diferensial homogen berderajat satu

$$(x + 2y)dx + (2x + 3y)dy = 0 \quad \text{faktor pengali adalah } \frac{1}{y}, \text{ diperoleh}$$

$$\frac{1}{y}(x + 2y)dx + \frac{1}{y}(2x + 3y)dy = 0$$

$$\left(\frac{x}{y} + 2\right)dx + \left(2\frac{x}{y} + 3\right)dy = 0$$

$$\text{Penyelesaiannya adalah } a = \frac{x}{y} ; x = ay ; dx = yda + ady$$

Lalu disubstitusikan :

$$(a + 2)[yda + ady] + (2a + 3)dy = 0$$

$$(a + 2)y da + (a + 2)a dy + (2a + 3) dy = 0$$

$$(a + 2)y da + (a^2 + 4a + 3) dy = 0$$

$$\frac{(a+2)}{(a^2+4a+3)} da + \frac{1}{y} dy = 0$$

Karena persamaan sudah terpisah, maka persamaan dapat di integralkan

$$\int \frac{(a+2)}{(a^2+4a+3)} da + \int \frac{1}{y} dy = 0$$

$$\int \frac{(a+2)}{(a+1)(a+3)} da + \int \frac{1}{y} dy = 0$$

$$\frac{1}{2} \ln \ln (a + 1) + \frac{1}{2} \ln \ln (a + 3) + \ln \ln y = C \quad \text{dikalikan dengan 2}$$

diperoleh

$$\ln \ln (a + 1) + \ln \ln (a + 3) + 2 \ln \ln y = 2C$$

$$\ln \ln (a + 1) + \ln \ln (a + 3) + \ln \ln y^2 = 2C$$

$$(a + 1)(a + 3)y^2 = C \quad \text{atau} \quad (a^2 + 4a + 3)y = C$$

Lalu substitusikan $a = \frac{x}{y}$ diperoleh

$$\left(\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 4 \left(\frac{x}{y} \right) + 3 \right) y = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{4x}{y} + 3 \right) y = C$$

$$\left(\frac{yx^2}{y^2} + \frac{4y^2x}{y^2} + \frac{3y^3}{y^2} \right) = C$$

$$yx^2 + 4y^2x + 3y^3 = Cy^2 \quad \blacksquare \quad \text{merupakan PUPD}$$

$$\text{Jika } y(2) = 1 \quad \text{maka } yx^2 + 4y^2x + 3y^3 = Cy^2$$

$$(1)(2)^2 + 4(1)^2(2) + 3(1)^3 = C(1)^2$$

$$4 + 8 + 3 = C \quad ; C = 15$$

Penyelesaian partikular persamaan diferensial (PPPD) :

$$yx^2 + 4y^2x + 3y^3 = 15y^2 \quad \blacksquare$$

Catatan :

$$\int \frac{(a+2)}{(a+1)(a+3)} da = \int \frac{A}{a+1} da + \int \frac{B}{a+3} da = \int \frac{1/2}{a+1} da + \int \frac{1/2}{a+3} da$$

$$\int \frac{(a+2)}{(a+1)(a+3)} da = \frac{1}{2} \int \frac{1}{a+1} da + \frac{1}{2} \int \frac{1}{a+3} da$$

$$\int \frac{(a+2)}{(a+1)(a+3)} da = \frac{1}{2} \ln \ln (a + 1) + \frac{1}{2} \ln \ln (a + 3)$$

Harga A dan B dapat dicari dengan :

$$A(a + 3) + B(a + 1) = a + 2$$

$$Aa + Ba + 3A + B = a + 2$$

$$(A + B)a + 3A + B = a + 2$$

$$A + B = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$3A + B = 2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Dengan cara eliminasi dan substitusi diperoleh :

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \quad ; \text{ jika } A = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + B = 1$$

$$B = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

E. Persamaan diferensial dengan koefisien fungsi linear

Persamaan diferensial pada persamaan (1), jika $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ adalah fungsi linear dalam x dan y , maka persamaan tersebut dinamakan persamaan diferensial dengan koefisien fungsi linear. Persamaan ini mempunyai bentuk :

$$(ax + by + c) dx + (px + qy + r) dy = 0$$

Dimana a, b, c, p, q , dan $r \in \mathbb{R}$

a. berbentuk Jika : $aq - bp = 0$ atau $\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = m$

Untuk mendapatkan PUPD gunakan substitusi $u = ax + by$, $dy = \frac{du - a dx}{b}$ maka PD tersebut dapat diubah menjadi perubah terpisah.

Contoh 12 Selesaikan persamaan diferensial

$$(x - 2y + 9)dx - (3x - 6y + 19)dy = 0$$

Penyelesaian 12 diketahui

$$a = 1 ; b = -2 ; c = 9 ; p = -3 ; q = 6 ; \text{ dan } r = -19$$

$$\text{Berdasarkan } aq - bp = (1)(6) - (-2)(-3) = 6 - 6 = 0$$

Maka penyelesaian persamaan diferensial adalah

$$u = x - 2y \quad ; \quad du = dx - 2dy$$

$$dy = \frac{dx - du}{2}$$

$$(x - 2y + 9)dx - 3(x - 2y + 19)dy = 0$$

$$(u + 9)dx - (3u + 19)\left(\frac{dx - du}{2}\right) = 0$$

$$-(u + 1)dx + (3u + 19)du = 0$$

$$dx = \frac{(3u + 19)du}{u + 1}$$

Persamaan tersebut sudah terpisah maka diintegral, diperoleh :

$$\int dx = \int \frac{(3u+19)du}{u+1}$$

$$x = \int \frac{3(u+1)+16}{u+1} du = \int 3du + \frac{16}{u+1} du$$

$$x = 3u + 16 \ln(u + 1) + C$$

Kemudian substitusikan $u = x - 2y$, maka

$$x = 3(x - 2y) + 16 \ln(x - 2y + 1) + C$$

$$2x - 6y + 16 \ln(x - 2y + 1) = C \quad \blacksquare$$

Merupakan penyelesaian umum PD.

Contoh 13 Selesaikan persamaan diferensial $(x + y + 1)dx + (x + y)dy = 0$

Penyelesaian 13 : Diketahui $a = 1$; $b = 1$; $c = 1$; $p = 1$; $q = 1$; $r = 0$

$$aq - bp = (1)(1) - (1)(1) = 0$$

Penyelesaiannya $u = x + y$; $du = dx + dy$; $dy = du - dx$

$$(x + y + 1)dx + (x + y)dy = 0$$

$$(u + 1)dx + (u)(du - dx) = 0$$

$$dx + udu = 0$$

Karena persamaan sudah terpisah maka dapat diintegral :

$$\int dx + \int udu = 0$$

$$x + \frac{1}{2}u^2 = C$$

$$2x + u^2 = 2C$$

jika $u = x + y$

$$2x + (x + y)^2 = C \quad \blacksquare \quad \text{merupakan PUPD}$$

b. Jika : $aq - bp \neq 0$

$$\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q} \text{ atau } px + qy \neq u(ax + by) \text{ untuk setiap } u \in R$$

Untuk mendapatkan penyelesaian umum gunakan substitusi $x = x_1 + h$ dan

$y = y_1 + k$, dimana $x = h$ dan $y = k$. Jadi penyelesaian diferensial menjadi

persamaan diferensial Homogen :

$$(ax_1 + by_1)dx_1 + (px_1 + qy_1)dy_1 = 0$$

Contoh 14 Selesaikan persamaan diferensial

$$(7x - 3y - 7)dx + (3x - 7y - 3)dy = 0$$

Penyelesaian 14 : diketahui $a = 7, b = -3, c = -7; p = 3, q = -7, r = -3$

$$aq - bp = (7)(-7) - (-3)(3) = -49 + 9 \neq 0$$

Penyelesaian persamaan diferensial :

Dicari nilai h dan k . dipilih dengan determinan :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{|7 -3 3 -7|}{|7 -3 3 -7|} = \frac{-40}{-40} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{|7 7 3 3|}{|7 -3 3 -7|} = \frac{0}{-40} = 0$$

Diperoleh nilai $x = h = 1 ; y = k = 0$ kemudian substitusikan :

$$x = x_1 + h \quad \text{dan} \quad y = y_1 + k$$

$$x = x_1 + 1 \quad \text{dan} \quad y = y_1 + 0$$

$$dx = dx_1 \quad dy = dy_1$$

$$(7(x_1 + 1) - 3y_1 - 7)dx_1 + (3(x_1 + 1) - 7y_1 - 3)dy_1 = 0$$

$$(7x_1 - 3y_1)dx_1 + (3x_1 - 7y_1)dy_1 = 0$$

Persamaan sudah homogen, maka diselesaikan dengan penyelesaian homogen derajat satu

$$\text{Misalkan : } a = \frac{x_1}{y_1} ; x_1 = ay_1 : dx_1 = a dy_1 + y_1 da$$

$$(7x_1 - 3y_1)dx_1 + (3x_1 - 7y_1)dy_1 = 0$$

Persamaan di kalikan dengan factor $\frac{1}{y_1}$ diperoleh

$$\left(7\frac{x_1}{y_1} - 3\right)dx_1 + \left(3\frac{x_1}{y_1} - 7\right)dy_1 = 0$$

$$(7a - 3)(a dy_1 + y_1 da) + (3a - 7)dy_1 = 0$$

$$(7a^2 - 3a) dy_1 + (3a - 7)dy_1 + (7a - 3)y_1 da = 0$$

$$(7a^2 - 7) dy_1 + (7a - 3)y_1 da = 0$$

$$\frac{7dy_1}{y_1} + \frac{(7a-3)}{(a^2-1)} da = 0$$

$$\int \frac{7dy_1}{y_1} + \int \frac{(7a-3)}{(a^2-1)} da = 7 \int \frac{dy_1}{y_1} + \left(\int \frac{7a-3}{(a-1)(a+1)} da \right) = C$$

$$7 \ln y_1 + \left[\int \frac{A}{a-1} da + \int \frac{B}{a+1} da \right] = C$$

Dengan mencari nilai A dan B dengan reduksi diperoleh : $A = 2$ dan $B = 5$ lalu substitusikan nilai A dan B diperoleh :

$$\ln \ln (y_1)^7 + \left[\int \frac{2}{a-1} da + \int \frac{5}{a+1} da \right] = C$$

$$\ln \ln (y_1)^7 + 2 \ln (a - 1) + 5 \ln (a + 1) = \ln \ln C$$

$$\ln \ln (y_1)^7 + \ln (a - 1)^2 + \ln \ln (a + 1)^5 = \ln \ln C$$

$$\ln \ln (y_1)^7 + \ln (a - 1)^2 + \ln \ln (a + 1)^5 = \ln \ln C$$

$$\ln \ln (y_1)^7 (a - 1)^2 (a + 1)^5 = \ln \ln C$$

$$(y_1)^7 (a - 1)^2 (a + 1)^5 = C \quad \text{dimana } \ln \ln C = C$$

Subtitusikan $y_1 = y$; $x_1 = x - 1$ dan $a = \frac{x_1}{y_1}$ diperoleh :

$$(y_1)^7 \left(\left(\frac{x_1}{y_1} - 1 \right)^2 \left(\frac{x_1}{y_1} + 1 \right)^5 \right) = C$$

$$(y)^7 \left(\left(\frac{x-1}{y} - 1 \right)^2 \left(\frac{x-1}{y} + 1 \right)^5 \right) = C$$

$$(y)^7 \left(\left(\frac{x-1}{y} - \frac{y}{y} \right)^2 \left(\frac{x-1}{y} + \frac{y}{y} \right)^5 \right) = C$$

$$(y)^7 \left(\left(\frac{x-y-1}{y} \right)^2 \left(\frac{x+y-1}{y} \right)^5 \right) = C$$

$$(x - y - 1)^2 (x + y - 1)^5 = C \quad \blacksquare$$

merupakan penyelesaian umum persamaan diferensial

Contoh 15 Selesaikan penyelesaian khusus dari persamaan yang diberikan $y(1) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$$

Penyelesaian 15.

$$(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0 \quad (15.1)$$

diketahui $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$; $p = -2$, $q = -4$, $r = 6$

$$aq - bp = (2)(-4) - (-5)(-2) = -8 + 10 \neq 0$$

Karena $aq - bp \neq 0$, maka Penyelesaian persamaan diferensial :

$$x = x_1 + h \quad ; \quad y = y_1 + k$$

Lalu dicari nilai h dan k dari persamaan (15.1). dipilih dengan determinan : dimana persamaan linear sebagai berikut :

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{|-c \ b \ -r \ q|}{|a \ b \ p \ q|} = \frac{|-3 \ -5 \ 6 \ 4|}{|2 \ -5 \ 2 \ 4|} = \frac{18}{18} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{|a \ -c \ p \ -r|}{|a \ b \ p \ q|} = \frac{|2 \ -3 \ 2 \ 6|}{|2 \ -5 \ 2 \ 4|} = \frac{18}{18} = 1$$

Diperoleh nilai $x = h = 1$; $y = k = 1$ kemudian substitusikan :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + h & \text{dan} & & y &= y_1 + k \\ x &= x_1 + 1 & \text{dan} & & y &= y_1 + 1 \\ dx &= dx_1 & & & dy &= dy_1 \end{aligned}$$

Persamaan (15.1) direduksi menjadi :

$$\begin{aligned} (2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy &= 0 \\ (2(x_1 + 1) - 5(y_1 + 1) + 3)dx_1 - (2(x_1 + 1) + 4(y_1 + 1) - 6)dy_1 &= 0 \\ (2x_1 - 5y_1)dx_1 - (2x_1 + 4y_1)dy_1 &= 0 \quad \dots\dots\dots (5.2) \end{aligned}$$

Persamaan (5.2) sudah homogen, maka penyelesaian persamaan (5.2) dengan penyelesaian homogen, diperoleh sebagai berikut :

Dengan factor pengali $\frac{1}{y_1}$, maka persamaan (5.2), menjadi

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_1} (2x_1 - 5y_1)dx_1 - \frac{1}{y_1} (2x_1 + 4y_1)dy_1 &= 0 \\ (2\frac{x_1}{y_1} - 5)dx_1 - (2\frac{x_1}{y_1} + 4)dy_1 &= 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian dengan substitusikan : $x_1 = ay_1 \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{a}$ maka

$$dx_1 = a dy_1 + y_1 da$$

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{dx_1 - y_1 da}{a} \\ (2a - 5)dx_1 - (2a + 4)dy_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$(2a - 5)dx_1 - (2a + 4)\left(\frac{dx_1 - \frac{x_1}{a}da}{a}\right) = 0$$

$$\frac{a^2(2a-5)}{a^2}dx_1 - (2a + 4)\left(\frac{adx_1 - x_1 da}{a^2}\right) = 0$$

$$(2a^3 - 5a^2 - 2a^2 - 4a)dx_1 + (2a + 4)x_1 da = 0$$

$$(2a^3 - 7a^2 - 4a)dx_1 + (2a + 4)x_1 da = 0$$

$$\frac{dx_1}{x_1} + \frac{(2a+4)}{(2a^3-7a^2-4a)}da = C$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} + \int \frac{(2a+4)}{(2a^3-7a^2-4a)} da = \ln \ln x_1 + \int \frac{2a+4}{a(2a+1)(a-4)} da = C$$

$$\ln x_1 + \int \frac{A}{a} da + \int \frac{B}{2a+1} da + \int \frac{C}{a-4} da = C_1$$

dengan cara reduksi diperoleh nilai $A = -1$; $B = \frac{4}{3}$; $C = \frac{1}{3}$

$$\ln x_1 + \int \frac{-1}{a} da + \int \frac{4/3}{2a+1} da + \int \frac{1/3}{a-4} da = C_1$$

$$\ln \ln x_1 - \ln \ln a + \frac{2}{3} \ln \ln (2a + 1) + \frac{1}{3} \ln \ln (a - 4) = C \quad \blacksquare$$

F. Persamaan Diferensial berbentuk : $yf(xy) dx + xg(xy) dy = 0$

Untuk mendapatkan PUPD substitusikan $a = yx$, $y = \frac{a}{x}$ $dy = \frac{x da - a dx}{x^2}$ maka dapat diperoleh PD dengan perubah terpisah.

Contoh 16 Selesaikan persamaan diferensial $y(xy + 1)dx + x(1 + xy + x^2 y^2)dy = 0$
Penyelesaian 16

$$y(xy + 1)dx + x(1 + xy + x^2 y^2)dy = 0 \quad \dots\dots\dots (16.1)$$

Substitusikan $a = xy$, $y = \frac{a}{x}$; $dy = \frac{a dx - x da}{x^2}$ kepers. (16.1) diperoleh :

Persamaan diferensial berubah menjadi :

$$y(a + 1)dx + x(1 + a + a^2)\left(\frac{a dx - x da}{x^2}\right) = 0$$

$$\frac{a}{x}(a + 1)dx + x(1 + a + a^2)\left(\frac{x da - a dx}{x^2}\right) = 0$$

$$\frac{a(a+1)dx + (x(1+a+a^2))da - a(1+a+a^2)dx}{x} = 0$$

Direduksi menjadi :

$$\frac{(x(1+a+a^2))da - (a^3)dx}{x} = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{(1+a+a^2)}{a^3} da = 0 \quad \dots\dots (16.2)$$

Persamaan (16.2) diferensial sudah terpisah, maka dapat diintegrasikan

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{(1+a+a^2)}{a^3} da = C_1$$

$$\ln \ln x + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a} - \ln \ln a = C_1$$

$$\ln \ln \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a} = C_1$$

Lalu substitusikan $a = xy$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(xy)^2} + \frac{xy}{(xy)^2} - \ln \frac{x^2 y^2}{(xy)^2} \ln y &= C_1 \\ 1 + 2xy - 2x^2 y^2 \ln \ln y &= 2C_1 x^2 y^2 \\ 1 + 2xy - 2x^2 y^2 \ln \ln y &= Cx^2 y^2 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

dimana $2C_1 = C$

Contoh 17 Selesaikan persamaan diferensial singular dari persamaan
 $y(1 + xy)dx + x(1 - xy)dy = 0$ $y(0) = 2$

Penyelesaian 17 :

Substitusikan $a = xy$; $x = \frac{a}{y}$; $dx = \frac{y da - a dy}{y^2}$

Persamaan berubah menjadi

$$\begin{aligned}y(1 + a)\left(\frac{y da - a dy}{y^2}\right) + \frac{a}{y}(1 - a)dy &= 0 \\ y^2(1 + a)da - ya(1 + a)dy + ay(1 - a)dy &= 0 \\ y^2(1 + a)da - 2ya^2 dy &= 0 \\ \frac{1+a}{a^2}da - \frac{2dy}{y} &= C\end{aligned}$$

Persamaan sudah terpisah, maka dapat diintegral menjadi :

$$\begin{aligned}\int \frac{1+a}{(a^2)} da - \int \frac{2dy}{y} &= C_1 \\ -\frac{1}{a} + \ln a - 2 \ln \ln y &= C_1\end{aligned}$$

Lalu substitusikan $a = xy$, diperoleh :

$$\frac{1}{xy} - \ln \ln xy - \ln y^2 = C_1$$

PUPD :

$$\frac{1}{xy} - \ln \ln \frac{x}{y} = C \quad \blacksquare \quad \text{dimana } C_1 = C$$

Jika syarat ; $y(1) = 2$; maka

$$\frac{1}{1(2)} - \ln \ln \frac{1}{2} = C \quad ; C = \frac{1}{2} - \ln \ln 2$$

PPPD :

$$\frac{1}{xy} - \ln \ln \frac{x}{y} = \frac{1}{2} - \ln \ln 2 \quad \blacksquare \quad \text{dimana } C_1 = C$$