

Тема: Визначений інтеграл.

Мета: сформувати в учнів поняття про інтеграл та ознайомити з формулою Ньютона – Лейбніца; формувати в учнів вміння використовувати визначений інтеграл для знаходження площ криволінійних трапецій; розвивати увагу та логічне мислення .

Хід уроку

I. Організаційний момент.

Привітання та оголошення теми уроку.



II. Актуалізація опорних знань.

Онлайн тестування «Первісна» за посилання

<https://vseosvita.ua/test/start/qzd786> .

III. Мотивація.

Презентація «Визначений інтеграл»

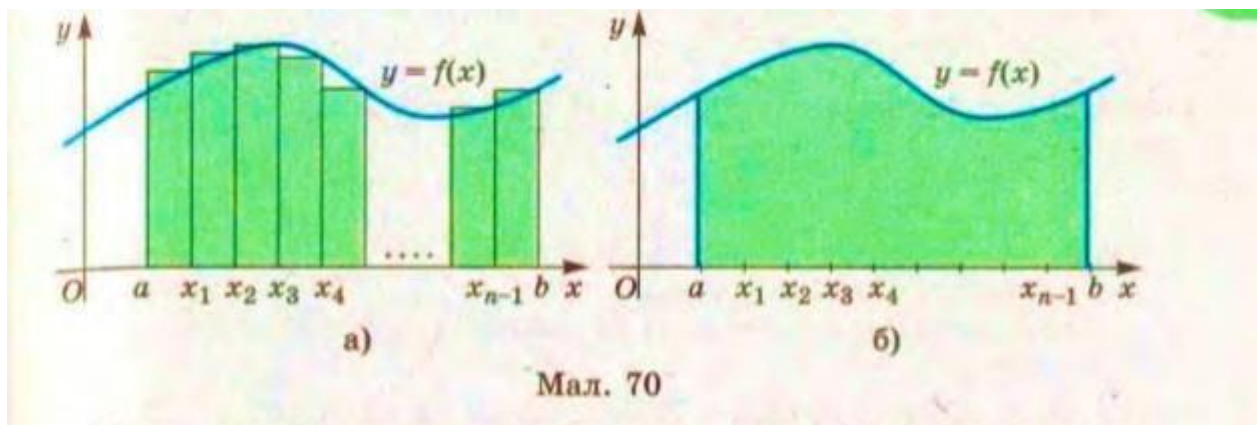
Відеоролик «Одна історія Ньютона»

<https://www.youtube.com/watch?v=EVTX2ZKmGds> .

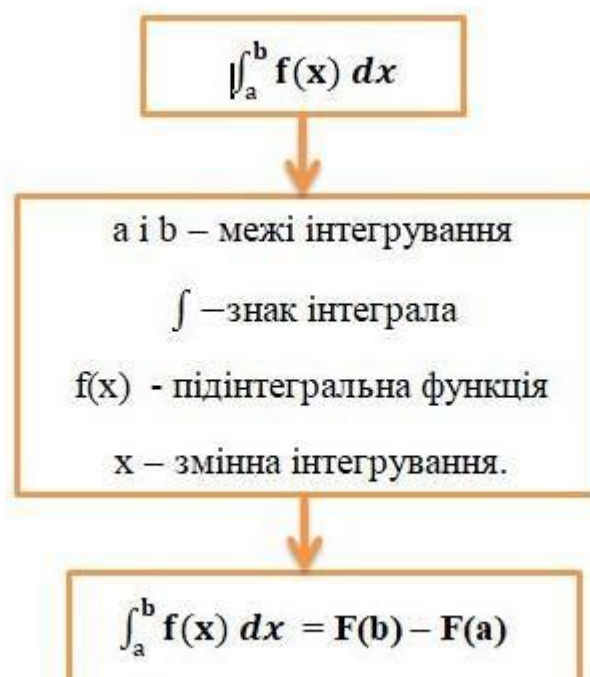
IV. Сприймання і усвідомлення нового матеріалу.

Розглянемо інший спосіб визначення площі підграфіка функції.

Нехай дано підграфік деякої функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ точками $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ на n рівних відрізків: $[a; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; b]$. Побудуємо на першому відрізку прямокутник висотою $f(x_1)$, на другому – прямокутник висотою $f(x_2)$ і т.д. Нарешті, на n -му відрізку побудуємо прямокутник висотою $f(b)$. Утвориться східчастий багатокутник, складений з n побудованих прямокутників. Якщо основа кожного такого прямокутника дорівнює Δx , то площа всього східчастого багатокутника $S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(b)$



Суми такого вигляду називають інтегральними сумами функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$. Границю такої інтегральної суми S_n функції $f(x)$ на $[a; b]$ при неbreжёнoму збільшені числа n називають **інтегралом** функції.



Опорний конспект.

Це *формула Ньютона-Лейбніца*, її називають ще *основною формулою математичного аналізу*.

Властивість інтеграла:

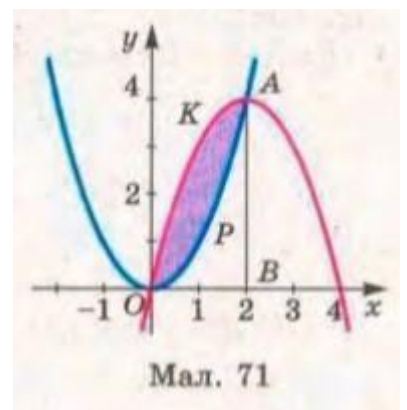
$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

III. Закріплення матеріалу.

1. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функції $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$.

Розв'язання. Побудуємо графіки даних функцій. Треба знайти площу зафарбованої фігури. Вона дорівнює різниці площ підграфіків ОВАК і ОВАР. Межі інтегрування – абсциси точок О і А, в яких перетинаються графіки функції, тобто значення x , що задовільняють систему рівнянь $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$. Із цієї системи випливає рівняння $x^2 = 4x - x^2$, коренями якого є: $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$.

Отже шукана площа:



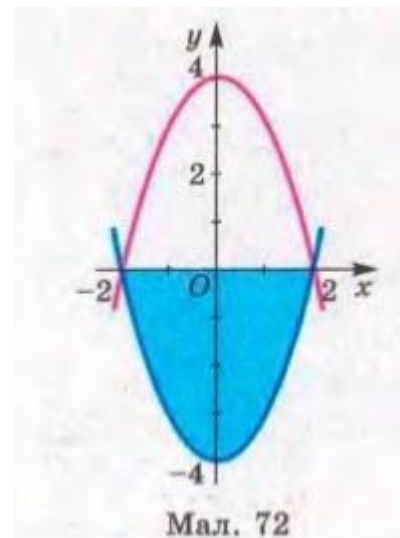
$$S = \int_0^2 (4x - x^2) dx - \int_0^2 x^2 dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = 2x^2 - 2\frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = (2 \cdot 2^2 - 2\frac{2^3}{3}) - (2 \cdot 0^2 - 2\frac{0^3}{3}) = 8 - 5\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ (кв.од.)}$$

2. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

$$y = x^2 - 4 \text{ і } y = 0$$

Розв'язання. Фігура, про яку йдеться в задачі, розміщена нижче від осі x , тому не відповідає означенню підграфіка функції. Проте вона симетрична відносно осі x підграфіка функції $y = 4 - x^2$ на проміжку $[-2; 2]$. Площі цих фігур рівні, тому $S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx =$

$$(4x - \frac{x^3}{3}) \Big|_{-2}^2 = (8 - \frac{8}{3}) - (-8 + \frac{8}{3}) = 10\frac{2}{3} \text{ (кв.од.)}.$$



3. Користуючись формулою Ньютона – Лейбніца, знайдіть площу підграфіка функції.

А) $f(x) = x$ на $[1; 2]$

$$S = \int_1^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = 1,5 \text{ (кв.од.)}.$$

Б) $f(x) = \cos x$ на $[-\frac{\pi}{2}; 0]$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \sin 0 - \sin(-\frac{\pi}{2}) = 0 - (-1) = 1 \text{ (кв.од.)}.$$

В) $f(x) = x^3 + 1$ на $[-1; 1]$

$$S = \int_{-1}^1 (x^3 + 1) dx = (\frac{x^4}{4} + x) \Big|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} + 1 - (\frac{(-1)^4}{4} - 1) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} + 1 = 2$$

(кв.од.).

Г) $f(x) = 2\sin x$ на $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \, dx = (-2 \cos x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -2 \cos \frac{\pi}{2} + 2 \cos \frac{\pi}{6} = -2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

(кв.од.).

$$Д) f(x) = x^3 \text{ на } [1; 2]$$

$$S = \int_1^2 x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4} \text{ (кв.од.)}.$$

$$Е) f(x) = \cos 2x \text{ на } [-\frac{\pi}{4}; 0]$$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 = \frac{1}{2} \sin (2 \cdot 0) - \frac{1}{2} \sin 2 \cdot (-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sin 0 +$$

$$\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ (кв.од.)}.$$

$$Є) f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ на } [1; 9]$$

$$S = \int_1^9 \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x} \right) = \sqrt{x} \Big|_1^9 = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2 \text{ (кв.од.)}.$$

$$Ж) f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \text{ на } [\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$$

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -(-1) + 1 = 2 \text{ (кв.од.)}.$$

V. Домашнє завдання.

§ 7 ст.57 №278