

Contrôle
BCGSem3

N.B : Un et un seul des exercices 5 et 6 est à faire

Exercice 1:

A et B sont deux événements tels que $P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$ et $P(A \cap B)=0.1$.

1. Quelle est la probabilité que A ou B se produisent.
2. Quelle est la probabilité qu'exactly un des deux événements se produise.
3. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne se produisent.
4. Quelle est la probabilité qu'au plus un des deux événements se produise.

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire telle que $E[X] = 2$ et $Var(X) = 5$, trouver

- a) $E[(2 + X)^2]$.
- b) $Var(4 + 3X)$.

Exercice 3:

Un échantillon de 16 fillettes de 10 ans a montré un poids moyen de 32.43 kg et une variance de 2.46 kg^2 . En supposant que les poids sont distribués selon une loi normale, estimer par intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha = 95\%$ le vrai poids moyen des fillettes de 10 ans.

Exercice 4:

On a effectué une étude, en milieu urbain et en milieu rural, sur le rythme cardiaque humain sur deux échantillons indépendants issus des deux milieux :

	Milieu urbain	Milieu rural
Effectif de l'échantillon	300	240
Moyenne de l'échantillon	80	77
Variance de l'échantillon	150	120

Peut-on affirmer qu'il existe une différence significative entre les rythmes cardiaques moyens des deux populations au risque de $\alpha = 5\%$?

Exercice 5:

La densité de probabilité d'une variable aléatoire est définie par l'expression suivante :

$$f_{\theta}(x) = \frac{kx^3}{\theta^4} \text{ si } x \in [0, \theta] \text{ et } f_{\theta}(x) = 0 \text{ si } x \notin [0, \theta],$$

où k est une constante et θ le paramètre d'intérêt.

1. Déterminer la constante k .

2. Montrer que la moyenne $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ n'est pas un estimateur sans biais du paramètre θ .

3. En déduire un estimateur sans biais de θ .

Exercice 6:

Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2 . Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ un échantillon aléatoire simple issu de X . La moyenne usuelle se note

$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i$ et la moyenne pondérée $\bar{X}_{pond} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i X_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$ où les $a_i > 0$ sont connus. Ces deux moyennes estiment chacune le paramètre μ .

1. Citer dans des situations où l'on est amené à utiliser la moyenne pondérée plus tôt que la moyenne usuelle.
2. Montrer que les deux moyennes sont sans biais.
3. Calculer les variances des deux estimateurs $\bar{X}$ et $\bar{X}_{pond}$.