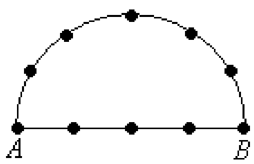
ЗАДАНИЯ
для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

9 класс.

1. Существуют ли целые числа m и n такие, что верно равенство: $2013m + 2012 = 2014n^2$? Ответ обосновать.

2. На отрезке АВ отмечены его концы – точки А и В, а также еще 3 точки, отличные от А и В (см. рисунок). Далее на отрезке АВ, как на диаметре, строится полуокружность. На полуокружности отмечаются еще 5 точек, отличных от А и В. (Всего отмечено 10 точек). Надя, Ваня и Вася играют в такую игру. Они по очереди рисуют треугольники с вершинами в отмеченных точках. При этом каждый новый треугольник не должен полностью совпадать ни с одним из уже нарисованных, хотя и может иметь с ними отдельные общие вершины и стороны. Первой ходит Надя, вторым – Ваня, третьим – Вася. Выигрывает тот, после чьего хода, следующий за ним игрок не сможет нарисовать треугольник. Кто выиграет при правильной игре?



3. Дана прямоугольная доска размером 62×130 клеток. Какое наибольшее количество прямоугольных пластин размера 1×4 можно разместить на этой доске? Каждая пластина должна полностью закрывать 4 клетки доски.

4. В треугольнике АВС проведена биссектриса ВМ (М $\in AC$). Окружность, проходящая через точку В и касающаяся стороны АС в точке М, пересекает стороны АВ и ВС в точках К и L соответственно. Доказать, что отрезок KL параллелен стороне АС.

5. Пусть *a, b, c* – попарно различные действительные числа, не равные нулю. Доказать, что всегда хотя бы одно из уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + 2ax + b = 0$, $cx^2 + ax - c = 0$ имеет решения.

Пользоваться калькулятором не разрешается

Математика.

Решения. 9 класс.

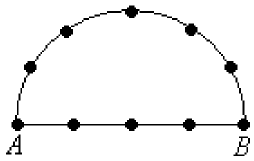
Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1**.** ***Решение***.

Число 2013 делится на 3, 2012 при делении на 3 дает остаток 2. Поэтому число $2013m+2012$ при делении на 3 дает остаток 2. Однако известно, что n^2 при делении на 3 может давать остатки 0 или 1. 2014 при делении на 3 дает остаток 1. Значит, $2014n^2$ при делении на 3 может давать остатки 0 или 1. Получили противоречие, т.е. таких целых чисел m и n не существует.

***Ответ*: не существуют.**

2. ***Решение.***



Подсчитаем наибольшее возможное количество построенных треугольников. Первую вершину треугольника можно выбрать 10 способами, вторую – 9, третью – 8. Итого три вершины можно выбрать $10\cdot 9\cdot 8$ способами. Необходимо учесть, что выбранные три вершины (например, A, B, C) могут быть выбраны в разном порядке: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA (всего 6 вариантов). Поэтому количество различных троек точек будет равно $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}=120$. (Знакомые с формулами комбинаторики тот же результат могут просто получить по формуле C_{10}^3). Заметим, что если три точки лежат на одной прямой, то они не образуют треугольник. В нашем случае это будут три точки, лежащие на отрезке AB. Несложно подсчитать, что из 5 точек 3 точки можно выбрать 10 способами ($C_5^3=10$). Таким образом, всего может получиться 120 – 10 = 110 различных треугольников. Поскольку число 110 при делении на 3 дает остаток 2, то последний 110-й треугольник нарисует игрок, делающий ход вторым, т. е. Ваня.

***Ответ*: выиграет Ваня.**

3. ***Решение***.

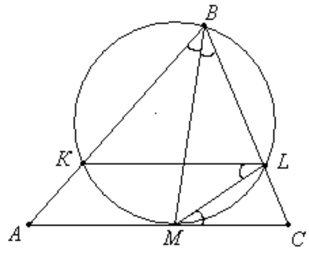
Если от данной доски отрезать уголок размера 2×2, то оставшаяся часть доски может быть легко замощена прямоугольниками 1×4. Таких прямоугольников на доске уместится $\frac{62\cdot 130-2^2}{4}=2014$. Докажем, что большее число прямоугольников разместить не удастся. Разобьем доску на квадраты размера 2×2 и раскрасим эти квадраты в шахматном порядке в черный и белый цвета. Пусть при этом угловые квадраты будут черными. Имеем доску 31×65, состоящую из квадратов 2×2. Легко видеть, что общее количество таких квадратов будет нечетным и черных квадратов будет на 1 больше, чем белых, т.е. черных клеток будет на 4 больше, чем белых. Далее, заметим, что каждый прямоугольник 1×4 закрывает ровно 2 черные и 2 белые клетки, поэтому, если даже закрыть все белые клетки, то 4 черные клетки останутся незакрытыми. Всего на доске будет закрыто не более, чем $62\cdot 130–4 = 8056$ клеток, что означает что на доске уместится не более, чем 8056:4=2014 прямоугольников.

***Ответ*: 2014**.

Указание для жюри: если в задаче получен правильный ответ, но не доказано, что это наибольшее возможное количество прямоугольников, то за задачу выставляется 50% баллов от максимально возможных.

4. ***Решение.***

$\angle CML=\angle MBL$ (угол между касательной и хордой), $\angle MBL=\angle ABM$ (BM - биссектриса), $\angle ABM=\angle KLM$ (опираются на дугу КМ). Значит $\angle CML=\angle KLM$. Но эти углы являются внутренними накрест лежащими, поэтому KL || AC. Что и требовалось доказать.



5. ***Решение.***

Предположим противное: пусть никакое из уравнений $ax^2+bx+c=0$, $ax^2+2ax+b=0$, $cx^2+ax-c=0$ не имеет решений. Тогда дискриминант каждого из этих уравнений будет отрицательным:

$b^2-4ac<0$, $4a^2-4ab<0$, $a^2+4c^2<0$.

Сложим последние три неравенства: $b^2-4ac+4a^2-4ab+a^2+4c^2<0$.

Далее,

$b^2-4ab+4a^2+a^2-4ac+4c^2<0$,

$(b-2a)^2+(a-2c)^2<0$

Последнее неравенство невозможно, так как квадрат любого числа неотрицателен. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.