

Тема: Застосування інтеграла до обчислення площі геометричних фігур.

Розв'язування вправ

Посилання

на

підручник:

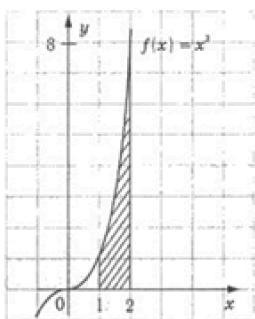
<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf>

Матеріали до теми:

1. Знаходження площі криволінійної трапеції.

Враховуючи геометричний зміст визначеного інтеграла та формулу Ньютона – Лейбніца, площу криволінійної трапеції можна знаходити за допомогою визначеного інтеграла, а саме

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$



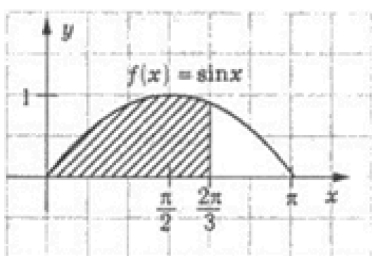
мал. 1

Приклад 1. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обчисленої графіком функції $f(x) = x^3$ та прямими $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

Розв'язання (мал. 1). Маємо

$$S = \int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4} = 3,75.$$

2.



Обчисліть площу криволінійної трапеції обмеженої графіком функції $f(x) = \sin x$ та прямими

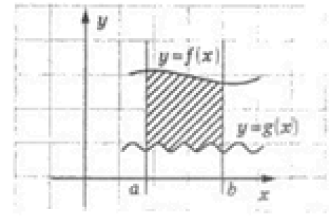
$$y = 0; x = 0 \text{ та } x = \frac{2\pi}{3}.$$

Розв'язання (мал. 2). Маємо

$$S = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = -\cos \frac{2\pi}{3} - (-\cos 0) = \frac{1}{2} + 1 = 1,5.$$

2. Знаходження площі фігури, обмеженої лініями

Розглянемо площу фігури, зверху обмежену графіком функцій $y = f(x)$, знизу - графіком функції $y = g(x)$ та вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$, причому функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ - неперервні на $[a;b]$ і для всіх



мал. 3

значень $x \in [a;b]$ виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$ (мал.3). Тоді площу S такої плоскої фігури можна знайти за формулою:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

□ **Опорний**

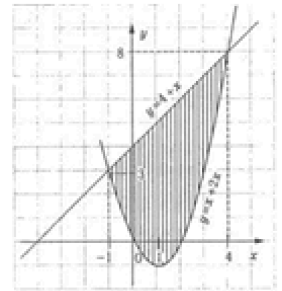
конспект для

знаходження площі плоских фігур

Приклад 3. Знайдіть площу фігури, обмежену графіками функцій $y = x^2 - 2x$ і $y = 4 + x$.

Розв'язання. Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій: $x^2 - 2x = 4 + x$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 4$.

Ординати точок перетину $y_1 = 3$; $y_2 = 8$. Зображуємо графіки функцій схематично (мал.4).



мал. 4

Шукана площа

$$S = \int_{-1}^4 ((4+x) - (x^2-2x)) dx = \int_{-1}^4 (4-x^2+3x) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^4 = \left(4 \cdot 4 - \frac{4^3}{3} + \frac{3}{2} \cdot 4^2 \right) - \left(4 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 \right) = 18\frac{2}{3} + 2\frac{1}{6} = 20\frac{5}{6}$$

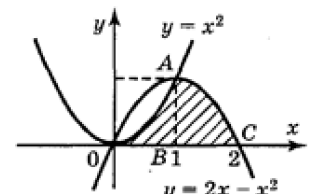
Приклад 4.

Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і $y = 2x - x^2$ та віссю OX .

Розв'язання

Побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = 2x - x^2$ і знайдемо абсциси точок перетину цих графіків із рівняння: $x^2 = 2x - x^2$. Корені цього рівняння $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Дана фігура зображена на мал.5.



мал. 5

Із рисунка видно, що ця фігура складається з двох криволінійних трапецій: OAB і BAC .

Отже, шукана площа дорівнює сумі площ цих трапецій:

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = 1$$

Відповідь: 1.

Приклад 5. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 4$, $y = 4 - x$.

Знайдемо абсциси точок перетину ліній $y = -x^2 + 4$, $y = 4 - x$:

$$-x^2 + 4 = 4 - x;$$

$$x^2 - x = 0;$$

$$x(x - 1) = 0;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1.$$

$$S = \int_0^1 (-x^2 + 4 - 4 - x) dx = \int_0^1 (-x^2 + x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Відповідь: $\frac{1}{6}$

Приклад 6. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 1$ і $y =$

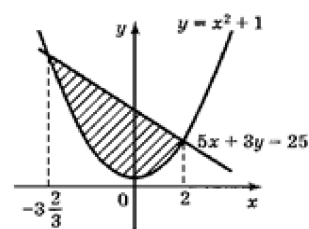
$$\frac{25 - 5x}{3}$$

Знайдемо абсциси точок перетину ліній

$$y = x^2 + 1 \text{ і } y = \frac{25 - 5x}{3} :$$

$$x^2 + 1 = \frac{25 - 5x}{3} ; 3x^2 + 3 = 25 - 5x;$$

$$3x^2 + 5x - 22 = 0; x_1 = 2; x_2 = -3\frac{2}{3}.$$



мал. 6

$$S = \int_{-\frac{2}{3}}^2 \left(\frac{25-5x}{3} - x^2 - 1 \right) dx = \int_{-\frac{2}{3}}^2 \left(-x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{22}{3} \right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{5}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{22}{3}x \right) \Big|_{-\frac{2}{3}}^2 =$$

$$= \left(-\frac{8}{3} - \frac{10}{3} - \frac{44}{3} \right) - \left(\frac{1331}{81} - \frac{605}{54} - \frac{242}{9} \right) = \frac{4913}{162} = 30 \frac{53}{162}.$$

Відповідь: $30 \frac{53}{162}$.

Завдання:

1. Повторити §2, п. 9,10. Опрацювати теоретичний матеріал: п. 11, с. 57-60.
2. Законспектувати теореми, означення, формули.
3. Виконати письмово вправи: 11.1, 11.2.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://www.youtube.com/watch?v=SoUilfi2xI0>

<https://vseosvita.ua/library/prezentacia-na-temu-obcislenna-plos-krivoliniijnih-trape-cij-369543.html>

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net, у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net.