

Capítulo I

TRACCION Y COMPRESION

§ 8. Fuerzas interiores y tensiones que se desarrollan en las secciones transversales de una barra en la tracción y compresión

Como se indicó en el § 3, se entiende por tracción el caso de sollicitación cuando en las secciones transversales de las barras aparecen solamente fuerzas normales, mientras que el resto de las fuerzas interiores (fuerza cortante, momento torsor y momento flector) es igual a cero.

Lo más usual es el caso de tracción de una barra por fuerzas aplicadas a sus extremos. La transmisión de los esfuerzos a la barra puede ser realizada de distintas formas, como se indica en la figura 15.

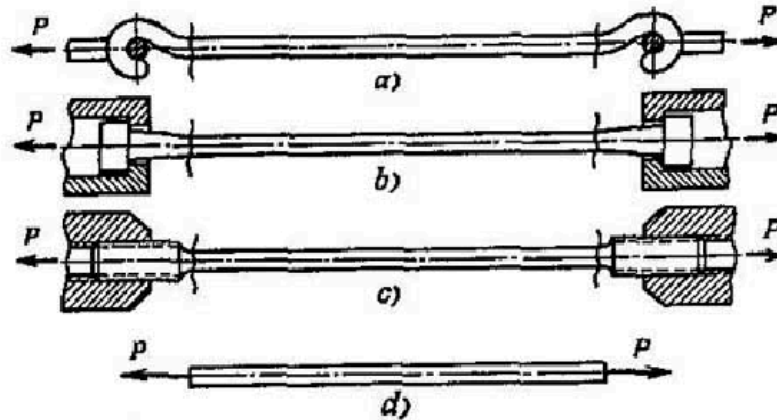


Fig. 15.

En todos los casos, sin embargo, el sistema de fuerzas exteriores se reduce a una fuerza P dirigida a lo largo del eje de la barra. Por eso, independientemente de las condiciones de sujeción de la barra traccionada, el esquema de cálculo es único, el indicado en la figura 15, d.

Si empleamos el método de las secciones, es evidente que en todas las secciones transversales de la barra aparecerán las mismas fuerzas normales N , iguales a P (fig. 16).

$$N = P.$$

La compresión se diferencia de la tracción, desde el punto de vista formal, por el signo de la fuerza N . En el caso de tracción la fuerza normal N va dirigida desde la sección hacia afuera, en el de compresión, hacia la sección. Así pues, al analizar las fuerzas interiores se mantiene el mismo método para la tracción y compresión.

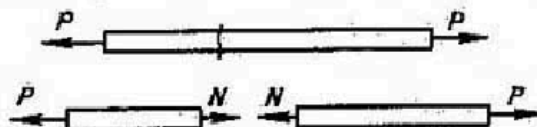


Fig. 16.

Al mismo tiempo, entre estos dos tipos de sollicitación pueden apreciarse diferencias cualitativas, como, por ejemplo, al investigar los procesos de rotura de los materiales o al investigar el comportamiento de barras largas y esbeltas, cuando la compresión va acompañada generalmente de flexión.

Consideremos las tensiones que aparecen en la sección transversal de una barra traccionada. La fuerza normal N es la resultante de las fuerzas interiores en la sección (fig. 17). Es natural suponer que

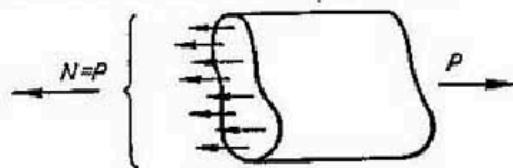


Fig. 17.

en el caso de una barra homogénea, las fuerzas interiores se distribuyen uniformemente en la sección transversal. Entonces las tensiones normales serán idénticas en todos los puntos de dicha sección.

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad (1.1)$$

siendo F el área de la sección transversal.

Está claro, que la suposición anterior sobre la distribución uniforme de las tensiones internas en la sección transversal, es válida siempre y cuando no se analizan las particularidades de apoyo en los extremos de la barra dada. Aquí se obra de acuerdo con el *principio de Saint Venant*, conocido científico francés del siglo pasado. El principio de Saint Venant es un principio general, pero en el caso concreto de barras se le puede formular como sigue: el modo concreto de aplicación de las fuerzas exteriores a la barra traccionada, como regla general *), influye solamente a distancias no superiores

*) Excluyendo las barras de paredes delgadas (véase cap. XI).

a las dimensiones características de la sección transversal. Esto quiere decir que al analizar una barra traccionada es suficiente tener en consideración solamente la resultante de las fuerzas exteriores P , sin interesarse por el modo concreto de aplicación de las fuerzas. Para ello es necesario prescindir de la parte de la barra situada en



Fig. 18.

el lugar de aplicación de las fuerzas exteriores, lo que se indica en la figura 15. Ignorando las partes de la barra situadas en los extremos se obtiene el esquema de cálculo (fig. 15, d) único, independientemente del modo de aplicar las fuerzas exteriores.

Este razonamiento es aplicable también a los tramos especiales de la barra, donde varían bruscamente las formas geométricas de la barra. Por ejemplo, en el caso de la barra escalonada de la figura 18, se debe excluir la zona donde el diámetro varía súbitamente y las zonas vecinas al agujero. En todos los tramos restantes las tensiones en las secciones transversales se distribuyen uniformemente y se obtienen por la fórmula (1.1).

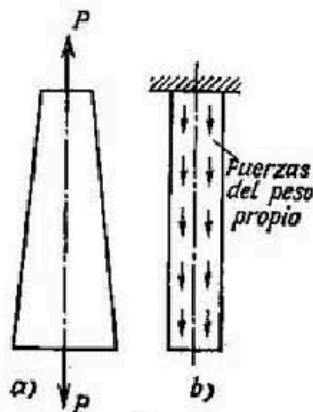


Fig. 19.

En el caso de una barra homogénea traccionada solicitada en sus extremos, las tensiones permanecen constantes tanto dentro de la sección transversal como a lo largo de la barra, es decir son constantes en todos los puntos del volumen que ocupa el sólido. Este estado tensional se denomina estado tensional homogéneo. En este caso todos los puntos del cuerpo

se encuentran en las mismas condiciones.

El concepto de estado tensional homogéneo está relacionado con el de la continuidad del medio que ocupa el sólido. Está claro, que la distribución de las fuerzas interiores en las condiciones reales no puede ser uniforme, debido a que los cristales del metal no son homogéneos y a la composición molecular de la materia. Por eso, cuando se habla de la distribución uniforme de las fuerzas interiores en la sección, se sobreentiende la distribución en áreas muy superio-

res a las dimensiones de las secciones de los cristales, es decir, sin contar con los detalles microscópicos. Esta reserva se refiere no solamente a la tracción y compresión sino, también, a todos los casos de sollicitación que serán analizados más adelante.

En el caso de tracción no siempre surge un estado tensional homogéneo. Así, por ejemplo, en el caso de la barra de sección transversal variable (fig. 19, *a*) las tensiones varían a lo largo de la barra, resultando que el estado tensional no es homogéneo. Lo mismo ocurre cuando la barra está sollicitada por su peso propio (fig. 19, *b*).

§ 9. Alargamiento de la barra y ley de Hooke

Las dimensiones de la barra traccionada varían según sea la magnitud de las fuerzas aplicadas. Si antes de aplicar la carga su longitud era l , después de aplicarla, será ya $l + \Delta l$ (fig. 20). La magnitud Δl se denomina alargamiento absoluto de la barra.

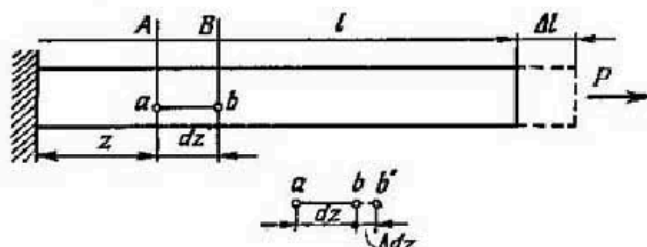


Fig. 20.

Consideraremos que el alargamiento absoluto y la deformación son consecuencias solamente de las tensiones que surgen en la barra. En realidad existen otros factores que también influyen sobre la magnitud de la deformación. Así por ejemplo, la deformación depende de la temperatura y del tiempo de duración de la carga. La magnitud de las deformaciones no elásticas depende de la «historia» de la sollicitación, es decir, de la manera en que tuvieron de crecer y disminuir las fuerzas exteriores. Por ahora, no trataremos estas cuestiones.

Puesto que en la barra sollicitada (fig. 20), el estado tensional es homogéneo y todos los tramos se encuentran en las mismas condiciones, la deformación ε a lo largo del eje de la barra será la misma, e igual al valor medio en la longitud l ,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.2)$$

Esta magnitud se denomina deformación unitaria de la barra.

En el caso de que el estado tensional no fuese homogéneo, la deformación en la sección *A* (fig. 20) se determinaría estableciendo

el límite para el tramo pequeño dz y entonces,

$$\epsilon = \frac{\Delta z}{dz} \quad (1.3)$$

Observemos, que en virtud de la distribución uniforme de las tensiones en la sección, los alargamientos de todos los tramos elementales de longitud ab (fig. 20) del segmento dz son iguales. Por lo tanto, si los extremos de los tramos se encontraban antes de la sollicitación en un mismo plano, formarán después de ella, también un plano, pero desplazado a lo largo del eje de la barra. Esto puede ser admitido como base para la interpretación del mecanismo de la tracción y compresión y constituye la *hipótesis de las secciones planas* (hipótesis de Bernoulli). Si consideramos esta hipótesis como base, entonces la distribución homogénea de las tensiones en la sección transversal se podrá deducir de ella. Cuando se trata de alargamientos pequeños, para la inmensa mayoría de los materiales es válida la ley de Hooke que establece la relación de proporcionalidad directa entre las tensiones y las deformaciones,

$$\sigma = E\epsilon \quad (1.4)$$

E es el coeficiente de proporcionalidad denominado *módulo de elasticidad de primer género*. El módulo de elasticidad es una constante física del material que se obtiene experimentalmente y se mide en las mismas unidades que σ , es decir, en kgf/cm^2 . El módulo de elasticidad para los materiales de mayor uso es el siguiente: (en kgf/cm^2):

Acero	$E = (2,0 + 2,1) \cdot 10^6$
Cobre	$E = 1,2 \cdot 10^6$
Latón	$E = (1,0 + 1,2) \cdot 10^6$
Aluminio y sus aleaciones con magnesio	$E = (0,7 + 0,8) \cdot 10^6$
Madera (a lo largo de las fibras)	$E = (0,08 + 0,12) \cdot 10^6$

La ley de Hooke es aproximada. En el caso de algunos materiales, como por ejemplo el acero, se cumple con gran exactitud dentro de amplios límites de variación de las tensiones. En otros casos, se observan apreciables desviaciones de la ley de Hooke. Por ejemplo, en el caso del hierro fundido y de otros materiales de construcción incluso para tensiones pequeñas, la ley de Hooke sólo puede ser admitida de manera aproximada. En los casos cuando la ley de Hooke no es válida, las deformaciones vienen dadas por medio de una función no lineal de la tensión

$$\epsilon = f(\sigma)$$

de tal manera, que esta función corresponda a la curva que se obtiene del ensayo del material

Volviendo a la expresión (1.4) y sustituyendo en ella σ por $\frac{N}{F}$ y ε por $\frac{\Delta dz}{dz}$, obtendremos,

$$\Delta dz = \frac{N dz}{EF}.$$

El alargamiento absoluto de la barra en el tramo de longitud l será,

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dz}{EF}. \quad (1.5)$$

Cuando la barra está cargada solamente en sus extremos, la fuerza normal $N=P$ no depende de z . Si, al mismo tiempo, la barra es de sección constante F , entonces de la expresión (1.5) obtendremos,

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}. \quad (1.6)$$

Al resolver muchos problemas prácticos surge la necesidad de considerar, no solamente los alargamientos debidos a las tensiones σ , sino también los relacionados con el cambio de temperatura. En este caso se emplea el principio de superposición, obteniendo ε como la suma de la deformación debida a la carga y la originada exclusivamente por el cambio de la temperatura,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t,$$

siendo α el coeficiente de dilatación lineal del material.

En el caso de una barra homogénea, solicitada en sus extremos y calentada uniformemente, obtendremos,

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + l\alpha t. \quad (1.7)$$

Así pues, las deformaciones correspondientes a la carga y a la temperatura se consideran independientes. Esto se basa sobre el hecho establecido experimentalmente de que el módulo de elasticidad E varía muy poco cuando se trata de un calentamiento moderado, al igual que α , que prácticamente, no depende de la tensión σ . En el caso del acero esto ocurre hasta temperaturas del orden de 300 a 400° C. Para mayores temperaturas es necesario contar con la dependencia de E de t .

Veamos algunos ejemplos de determinación de las tensiones y desplazamientos en los casos más simples de tracción y compresión.

Ejemplo 1.1. Determinar la ley de distribución de las fuerzas normales, tensiones y desplazamientos a lo largo de la barra escalonada, solicitada en su extremo por la fuerza P (fig. 21, a), así como también las magnitudes numéricas de la máxima tensión y del desplazamiento máximo, $P=5$ tf, $F=2$ cm² y $l=1$ m. El material de la barra es acero para el cual $E=2 \cdot 10^6$ kgf/cm². Puesto que la fuerza P es considerable, el peso propio de la barra no tiene importancia.

De las condiciones de equilibrio de cualquiera de las partes separadas de la barra, se deduce que la fuerza normal N en cada sección de la barra es igual a la fuerza exterior P . Construyamos el diagrama de la variación de la fuerza N a lo largo del eje de la barra. Los diagramas de manera muy clara expresan las leyes de variación de las distintas magnitudes que se examinan. En este caso, el diagrama de la fuerza normal está representado en la fig. 21, *b* por un rectángulo,

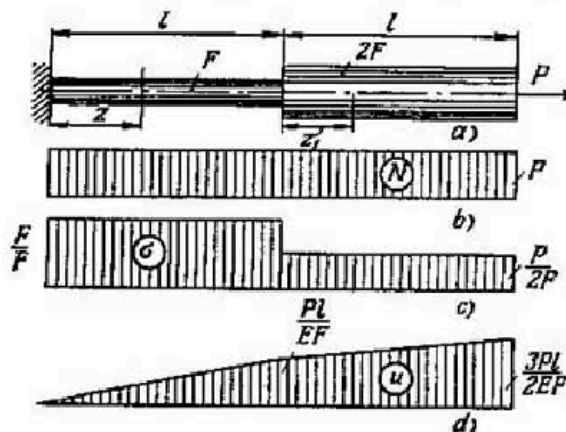


Fig. 21.

ya que $N = P = \text{constante}$. En la figura, el diagrama de N está rayado por líneas orientadas en la misma dirección en que se colocan los valores de N , es decir, verticalmente.

Para obtener el diagrama de las tensiones σ , es necesario dividir las ordenadas del diagrama de N por el área F (fig. 21, *c*). El valor máximo de σ es,

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} = \frac{5\,000}{2} = 2\,500 \text{ kgf/cm}^2.$$

Determinemos ahora el desplazamiento u (en cm) de cada sección de la barra, en la dirección de la fuerza P . El desplazamiento de la sección z coincide con el alargamiento del tramo de longitud z y, por lo tanto, de acuerdo con la fórmula (1.6),

$$u = \frac{Pz}{EF}.$$

Es decir, en el tramo donde z varía de cero a l , el desplazamiento u es proporcional a z (fig. 21, *d*). En el segundo tramo de la barra el desplazamiento es

$$u = \frac{Pl}{EF} + \frac{Pz_1}{2EF}.$$

La dependencia entre u y z , también será lineal. El desplazamiento máximo ocurre en la sección del extremo de la barra,

$$u_{\max} = \frac{3Pl}{2EF} = \frac{3 \cdot 5\,000 \cdot 100}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2} = 0,187 \text{ cm}.$$

Ejemplo 1.2. Construir el diagrama de las fuerzas normales, tensiones y desplazamientos en el caso de una barra cilíndrica colgada libremente y solicitada por las fuerzas de su peso propio (fig. 22). La longitud de la barra es l , el área de la sección transversal, F y el peso específico del material, γ .

La fuerza normal en la sección z es igual al peso de la parte de la barra que se encuentra debajo de la sección,

$$N = \gamma F z.$$

Es decir que la fuerza normal es proporcional a z . El diagrama de N en este caso se raya con líneas horizontales, puesto que las magnitudes de N se orientan horizontalmente. La tensión en la sección indicada es $\sigma = \gamma z$ (véase el diagrama de la fig. 22).

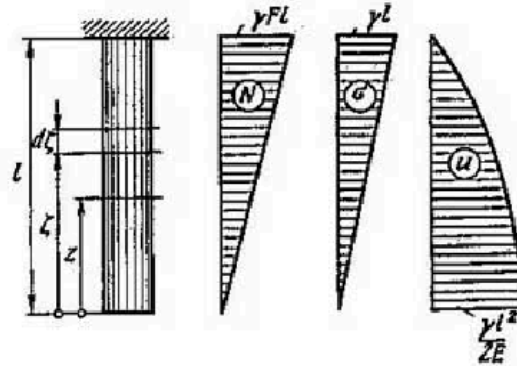


Fig. 22.

El desplazamiento u de la sección z es igual al alargamiento del tramo superior de la barra. Por la fórmula (1.5) obtendremos:

$$u = \int_z^l \frac{\gamma F \zeta d\zeta}{EF} = \frac{\gamma}{2E} (l^2 - z^2).$$

Así pues, la ley de variación de u se interpreta por una función cuadrática de z . El máximo desplazamiento $u_{\max}$ ocurre en la sección del extremo inferior ($z=0$), y es

$$u_{\max} = \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Ejemplo 1.3. La columna de la figura 23 está cargada con la fuerza P y con su peso propio. Determinar la ley de variación del área de la sección transversal $F=F(z)$, de tal manera que las tensiones en todas las secciones sean las mismas e iguales a $\frac{P}{F_0}$. Constrúyase el diagrama de las fuerzas normales, tensiones y desplazamientos.

En la sección a la distancia z del borde la fuerza normal de compresión N es,

$$N = P + \gamma \int_0^z F d\zeta.$$

Según la condición del problema

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P + \gamma \int_0^z F d\zeta}{F} = \frac{P}{F_0} = \text{const},$$

donde se obtiene,

$$P + \gamma \int_0^z F d\zeta = \frac{P}{F_0} F.$$

Derivando las dos partes de la igualdad con relación a z , hallaremos que $\gamma F = \frac{P}{F_0} \frac{dF}{dz}$ o sea,

$$dz = \frac{P}{\gamma F_0} \frac{dF}{F}.$$

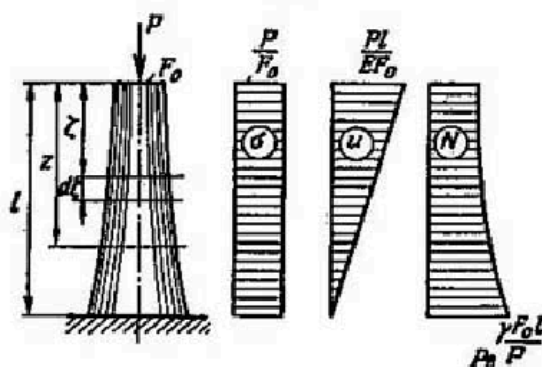


Fig. 23.

Integrando obtendremos,

$$z = \frac{P}{\gamma F_0} (\ln F - \ln C)$$

o

$$F = C e^{\frac{\gamma F_0 z}{P}}.$$

Cuando $z=0$, $F=F_0$ y, por lo tanto, $C=F_0$, es decir, que la ley de variación de F en cuestión será,

$$F = F_0 e^{\frac{\gamma F_0 z}{P}}.$$

Conviene comenzar la construcción de los diagramas por el de σ , que no varía a lo largo del eje de la columna (fig. 23). Puesto que la tensión es constante, será constante también el alargamiento unitario ϵ . Es decir, el desplazamiento u aumenta proporcionalmente a la distancia a la base de la columna.

La fuerza normal en la sección z será,

$$N = \sigma F = P e^{\frac{\gamma F_0 z}{P}}.$$

El diagrama de N está representado en la figura 23.

El problema analizado se refiere a un caso muy frecuente en la resistencia de materiales cuando se busca la condición de igualdad de resistencia. Si la tensión en cierto punto del cuerpo (en nuestro caso de la columna) es igual para todos los puntos del volumen ocupado por el cuerpo, este tipo de construcciones se llama de igual resistencia. En estas estructuras el material se aprovecha de la manera más efectiva posible.

Ejemplo 1.4. El soporte ABC tiene una carga P en su extremo (fig. 24). Determinar la sección transversal de las barras AB y BC de tal manera que las tensiones que en ellas surgen sean idénticas e iguales a σ . El ángulo α debe escogerse de la condición del peso mínimo de la construcción, para la longitud l dada del voladizo.

De la condición de equilibrio del nudo B (fig. 24) se obtienen las fuerzas normales en las barras,

$$N_1 = P \operatorname{ctg} \alpha, \quad N_2 = \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Determinamos ahora las áreas de las secciones transversales de las barras, dada la tensión σ ,

$$F_1 = \frac{N_1}{\sigma} = \frac{P}{\sigma} \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$F_2 = \frac{N_2}{\sigma} = \frac{P}{\sigma} \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

El peso de la estructura del soporte es proporcional a su volumen,

$$V = l_1 F_1 + l_2 F_2.$$

Introduciendo aquí las longitudes y las áreas de las barras, obtendremos,

$$V = \frac{Pl}{\sigma} \left(\operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} \right).$$

El volumen V resulta ser mínimo cuando

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{3}; \quad \alpha \approx 55^\circ.$$

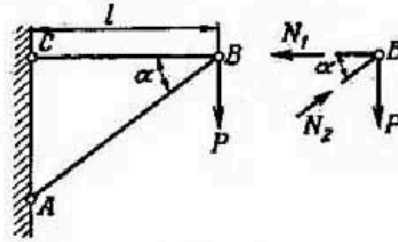


Fig. 24.

§ 10. Energía potencial de la deformación

Veamos el proceso de deformación del sólido elástico desde el punto de vista energético.

Las fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo elástico realizan cierto trabajo, que designaremos por A . Como resultado del trabajo realizado, en el cuerpo, se acumula cierta energía potencial U del sólido deformado. Al mismo tiempo, parte del trabajo sirve para transmitir ciertas velocidades a la masa del sólido, es decir, se transforma en energía cinética K . El balance de la energía es el siguiente:

$$A = U + K.$$

Si la carga se aplica lentamente, la velocidad del desplazamiento de las masas del cuerpo será pequeña. Este proceso de carga se denomina *estático*. El cuerpo en cada momento se encuentra en estado de equilibrio y, en este caso,

$$A = U.$$

El trabajo de las fuerzas exteriores se transforma totalmente en energía potencial de la deformación.

Al descargar el cuerpo a cuenta de la energía potencial se realiza cierto trabajo. Es decir que el sólido elástico es un acumulador de

energía. Esta propiedad de los sólidos elásticos se aprovecha ampliamente, por ejemplo, en los resortes del mecanismo de los relojes y en diversos tipos de amortiguadores elásticos (resortes, muelles, ejes de torsión, etc.).

En la figura 25 está representada una barra traccionada. Para mayor claridad en los razonamientos, el alargamiento de la barra se representa en escala exagerada. De acuerdo con el segmento Δl , en la parte inferior, está representado el gráfico de la variación de la fuerza P .

Como en el desplazamiento Δl la fuerza P no permanece constante, el trabajo realizado al traccionar la barra tiene que ser determinado

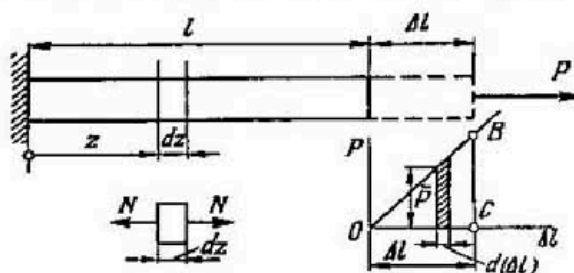


Fig. 25.

integrando sobre los tramos elementales del camino recorrido. En el desplazamiento elemental $d(\Delta l)$ el trabajo de la fuerza $\bar{P}$ será,

$$dA = \bar{P} d(\Delta l).$$

Claro está que el trabajo correspondiente al desplazamiento Δl es numéricamente igual al área del triángulo OBC , es decir,

$$A = U = \frac{1}{2} P \Delta l.$$

Así pues, el trabajo de la fuerza en el desplazamiento elástico se determina como la mitad del producto del valor máximo de la fuerza por el desplazamiento Δl . Si la relación entre la fuerza y el desplazamiento no fuera lineal, entonces en el lugar del coeficiente $\frac{1}{2}$ figuraría otro coeficiente. Cuando la fuerza es constante el coeficiente se hace igual a la unidad. En adelante, al calcular el trabajo de las fuerzas exteriores, escribiremos el coeficiente $\frac{1}{2}$ sin más explicaciones. Eliminando Δl de la expresión de U obtenida, hallaremos

$$U = \frac{P^2 l}{2EF}. \quad (1.8)$$

Si la fuerza normal N varía a lo largo del eje de la barra entonces la energía potencial de la deformación se determinará sumando sobre todos los tramos dz (fig. 25). Para un tramo elemental se obtiene,

$$dU = \frac{N^2 dz}{2EF}$$

y para toda la barra,

$$U = \int_0^l \frac{N^2 dz}{2EF}. \quad (1.9)$$

Las relaciones energéticas se emplean ampliamente al determinar los desplazamientos en sistemas elásticos complicados. Los teoremas generales que a esto se refieren serán estudiados en el capítulo V.

§ 11. Sistemas estáticamente determinados (isostáticos) y estáticamente indeterminados (hiperestáticos)

En todos los casos analizados hasta ahora, las fuerzas normales en las secciones transversales de las barras se determinaban por el método de las secciones, analizando el equilibrio de la parte separada. Pero este método de determinación de las fuerzas normales y, en general, de las fuerzas interiores en la barra no siempre es posible. En la práctica, constantemente nos encontramos con sistemas con gran número de ligaduras y, para determinar las fuerzas interiores en estos sistemas, las ecuaciones de la estática son insuficientes. Estos sistemas se denominan sistemas *estáticamente indeterminados* (hiperestáticos).

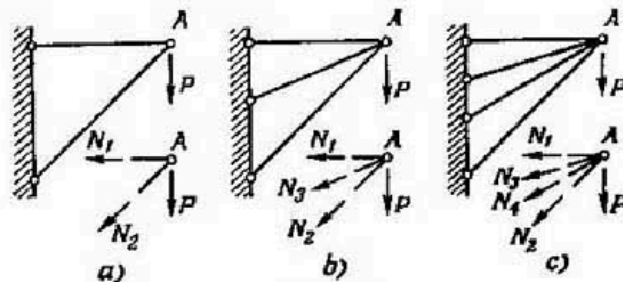


Fig. 26.

En la figura 26, *a* está representado un voladizo compuesto por dos barras. Los esfuerzos en las barras que lo constituyen se hallan sin dificultad de las condiciones de equilibrio del nudo *A*. Si complicamos la estructura del voladizo, agregándole una barra más (fig. 26, *b*) entonces, por el método anterior, será, imposible determinar los esfuerzos en las barras, puesto que, como antes, se pueden plantear para el nudo *A* solamente dos ecuaciones de la estática, mientras que el número de incógnitas es tres. En estos casos se dice que el sistema tiene un grado de hiperestaticidad. Complicando la estructura más aún, introduciendo nuevas barras, se pueden obtener sistemas de doble grado de hiperestaticidad (fig. 26, *c*), de triple grado