



DEVOIR EN CLASSE 1 -SECONDE-

EXERCICE 1

Soient les fractions

$$A = \frac{28}{55} \text{ et } B = \frac{39}{75}$$

1. A et B sont-ils des nombres décimaux ?

$$A = \frac{28}{55} = \frac{2^2 \times 7}{5 \times 11}$$

Donc la fraction A est irréductible : son dénominateur n'est pas seulement multiple de 2 et/ou de 5 (mais aussi de 11) donc A **n'est pas un nombre décimal**.

$$B = \frac{39}{75} = \frac{3 \times 13}{3 \times 5^2} = \frac{13}{5^2}$$

Le dénominateur de la fraction irréductible égale à B n'est multiple que de 5 donc B **est décimal**. On peut aussi remarquer que

$$B = \frac{13}{25} = \frac{13 \times 4}{25 \times 4} = \frac{52}{100} = 0,52$$

Remarque

Pour montrer que A n'est pas décimal avec la seule définition du cours, il fallait faire un raisonnement par l'absurde (non exigé dans le devoir). Ainsi, on suppose que A est décimal donc il existe un entier n et un entier a tels que

$$A = \frac{a}{10^n} \Leftrightarrow \frac{2^2 \times 7}{5 \times 11} = \frac{a}{10^n} \Leftrightarrow 2^2 \times 7 \times 10^n = 5 \times 11a$$

On en déduit que $2^2 \times 7 \times 10^n$ est un multiple de 11 ce qui est absurde donc A n'est pas décimal.

2. Justifier que $B > A$

Pour comparer A et B, il suffit de les mettre sur le même dénominateur

$$A = \frac{28}{55} = \frac{5 \times 28}{5 \times 55} = \frac{140}{275} \text{ et } B = \frac{13}{25} = \frac{11 \times 13}{11 \times 25} = \frac{143}{275}$$

Donc $B > A$

3. Donner un nombre décimal strictement compris entre A et B.

Remarquons que $A \approx 0,5091$ donc **0,51** est un nombre décimal strictement compris entre A et B.

4. Trouver un nombre rationnel strictement compris entre A et B et qui ne soit pas un nombre décimal.

D'après la question 2, $\frac{141}{275}$ et $\frac{142}{275}$ sont deux nombres rationnels strictement compris entre A et B et ne sont pas des nombres décimaux.

EXERCICE 2

1. Trouver deux rationnels qui ne soient pas des décimaux dont la somme est un entier.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

2. Trouver deux irrationnels dont le produit est un nombre entier.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

3. Trouver deux irrationnels dont la somme est un nombre entier.

$$-\pi + \pi = 0$$

EXERCICE 3

Soient a et b deux entier relatifs impairs, montrer que $(a + b)(a - b)$ est un multiple de 4.

Soient a et b deux entier relatifs impairs, montrons que $(a + b)(a - b)$ est un multiple de 4.

Il existe deux entiers n, p ∈ Z tels que

$$a = 2n + 1 \text{ et } b = 2p + 1$$

$$(a + b)(a - b) = (2n + 1 + 2p + 1)[(2n + 1) - (2p + 1)] = (2n + 2p + 2)(2n - 2p) = 4(n + p + 1)(n - p)$$

Or, $(n + p + 1)(n - p) \in \mathbb{Z}$

Donc $(a + b)(a - b)$ est bien un multiple de 4.

Remarque

On pouvait aussi voir que

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 = (2n + 1)^2 - (2p + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 - (4p^2 + 4p + 1) = 4(n^2 + n - p^2 - p)$$

EXERCICE 4

Un **diviseur propre** est un diviseur **positif** autre que le nombre lui-même. Un nombre égal à la somme de ses diviseurs propres est **parfait**. 6 est parfait puisque $1 + 2 + 3 = 6$

1. Montrer que 28 et 496 sont parfaits.

Les diviseurs propres de $28 = 2^2 \times 7$ sont

1 2 4 7 14

$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ donc 28 est parfait.

Les diviseurs propres de $496 = 2^4 \times 31$ sont

1 2 4 8 16 31 62 124 248

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$ donc 496 est parfait.

Remarque

On ne connaît que 40 nombres parfaits (il y en a certainement d'autres). Les premiers sont 6 – 28 – 496 – 8 128 – 33 550 33 – 8 589 869 056...

« Six est un nombre parfait en lui-même, non parce que Dieu a créé toutes choses en six jours, mais Dieu a créé toutes choses en six jours parce que ce nombre est parfait. » (Saint-Augustin, 420 après J.C.). Deux nombres sont **amiables** (ou **amis**) si la somme des diviseurs propres de l'un est égale à l'autre et réciproquement. Par exemple, 220 et 284 sont amis.

Somme des diviseurs propres de **220** :

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

Somme des diviseurs propres de **284** : $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$

2. Montrer que 1184 et 1210 sont amis.

Les diviseurs propres de $1184 = 2^5 \times 37$ sont

1 2 4 8 16 32 37 74 148 296 592

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1210$$

Les diviseurs propres de $1210 = 2 \times 5 \times 11^2$ sont

1 2 5 10 11 22 55 110 121 242 605

$$1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1184$$

Donc **1 184 et 1 210 sont amis.**

Les permutations d'un nombre à un chiffre sont **égales à lui-même**. S'ils sont premiers, ils sont alors forcément permutables.

2. Détermine les nombres premiers permutables inférieurs à 100.

2 3 5 7 11 13 17 31 37 71 73 79 97

3. Justifie que tous les chiffres d'un nombre permutable à plusieurs chiffres sont impairs et différents de 5.

Si un nombre premier contient un chiffre pair ou le chiffre 5, alors une de ses permutations est nécessairement **paire ou multiple de 5** donc pas un nombre premier. Dans ce cas, ce nombre premier n'est pas permutable.

4. Les entiers 113 et 127 sont premiers. Sont-ils permutables ?

113, 311 et 131 sont premiers donc 113 est **permutable**.

127 contient le chiffre 2 donc il n'est **pas permutable** d'après la question précédente (712 n'est pas premier).

Remarque

Les mathématiciens conjecturent qu'il existent une infinité de nombres premiers permutables mais ce n'est pas encore démontré. Pour en trouver, on cherche des nombres premiers qui ne s'écrivent qu'avec des 1. Ce sont les nombres **répunits** (de l'anglais **repeated unit**) notés R_n où n désigne le nombre de 1 dans l'écriture du nombre. Par exemple, $R_2 = 11$, R_{19} , R_{23} , R_{317} et R_{1031} sont des nombres premiers (et donc permutables).

EXERCICE 5

Un nombre premier est permutable s'il reste premier après n'importe quelle permutation de ses chiffres. Ainsi, 13 est permutable car 13 et 31 sont des nombres premiers.

1. Justifie que les nombres premiers à un chiffre sont permutables.