Correction Concours EIA 1999
MP/PC/PSI/PT

COMPORTEMENT ROUTIER D'UNE AUTOMOBILE

I. Modèle simplifié de la suspension

1. A l'équilibre les tensions $\vec{T}_1$ des deux ressorts avant et $\vec{T}_2$ des deux ressorts arrière équilibrent le poids du véhicule (châssis) : $\vec{P} + 2\vec{T}_1 + 2\vec{T}_2 = \vec{0}$ d'où par projection sur $\vec{u}_z$: $-2k_1(L_{e1} - L_{01}) - 2k_2(L_{e2} - L_{02}) - Mg = 0$ (1)

Le moment résultant par rapport à l'axe G_y est nul à l'équilibre :

$2k_1(L_{e1} - L_{01})D_1 - 2k_2(L_{e2} - L_{02})D_2 = 0$ (2) (car $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ sont quasi-perpendiculaires à G_1G et G_2G respectivement).

Après élimination, on obtient : $L_{e1} = L_{01} - \dfrac{MgD_2}{2k_1(D_1 + D_2)}$ et $L_{e2} = L_{02} - \dfrac{MgD_1}{2k_2(D_1 + D_2)}$

2.1 Le déplacement de G_1 par rapport au sol est lié à celui de G et à la rotation du châssis par $\vec{V}_{G1} = \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GG_1}$, d'où $d\vec{G}_1 = d\vec{G} + d\theta\vec{u}_y \wedge \overrightarrow{GG_1}$, avec $\overrightarrow{GG_1} \approx D_1\vec{u}_x$, donc : $d\vec{G}_1 = d\vec{G} - D_1 d\theta\vec{u}_z$. De même, $d\vec{G}_2 = d\vec{G} + d\theta\vec{u}_y \wedge \overrightarrow{GG_2}$ avec $\overrightarrow{GG_2} \approx -D_2\vec{u}_x$.

Le déplacement s'en déduit par intégration et projection sur $\vec{u}_z$: $z_1 \approx z - D_1\theta$ / $z_2 \approx z + D_2\theta$.

2.2 D'après le théorème de la résultante cinétique appliqué au châssis dans le référentiel terrestre : $M\vec{\gamma} = 2\vec{T}_1 + 2\vec{T}_2 + 2\vec{F}_1 + 2\vec{F}_2 + \vec{P}$ avec $\vec{T}_1 = -k_1(L_1 - L_{01})\vec{u}_z$, $\vec{T}_2 = -k_2(L_2 - L_{02})\vec{u}_z$, les forces de frottement des amortisseurs étant : $\vec{F}_1 = -a_1\dot{z}_1\vec{u}_z$ et $\vec{F}_2 = -a_2\dot{z}_2\vec{u}_z$.

On en déduit : $M\ddot{z} = -2k_1(L_1 - L_{01}) - 2k_2(L_2 - L_{02}) - 2a_1\dot{z}_1 - 2a_2\dot{z}_2 - Mg$,

et en soustrayant (1) : $M\ddot{z} = -2k_1(L_1 - L_{e1}) - 2k_2(L_2 - L_{e2}) - 2a_1\dot{z}_1 - 2a_2\dot{z}_2$

avec $z_1 = L_1 - L_{e1}$ et $z_2 = L_2 - L_{e2}$: $M\ddot{z} = -2k_1 z_1 - 2k_2 z_2 - 2a_1 \dot{z}_1 - 2a_2 \dot{z}_2$.

Le théorème du moment cinétique s'écrit de même, après projection sur G_y :

$$J\ddot{\theta} = +2k_1(L_1 - L_{01})D_1 - 2k_2(L_2 - L_{02})D_2 + 2a_1\dot{z}_1 D_1 - 2a_2\dot{z}_2 D_2$$

En retranchant l'équation (2) on obtient :

$$J\ddot{\theta} = +2k_1 z_1 D_1 - 2k_2 z_2 D_2 + 2a_1\dot{z}_1 D_1 - 2a_2\dot{z}_2 D_2$$

2.3 En substituant z_1 et z_2 par leurs expressions : $z_1 \approx z - D_1\theta$ et $z_2 \approx z + D_2\theta$, ainsi que $\dot{z}_1 \approx \dot{z} - D_1\dot{\theta}$ et $\dot{z}_2 \approx \dot{z} + D_2\dot{\theta}$, on obtient :

$$M\ddot{z} = -2(k_1 + k_2)z - 2(a_1 + a_2)\dot{z} - 2(k_2 D_2 - k_1 D_1)\theta - 2(a_2 D_2 - a_1 D_1)\dot{\theta}$$
$$J\ddot{\theta} = -2(k_2 D_2 - k_1 D_1)z - 2(a_2 D_2 - a_1 D_1)\dot{z} - 2(k_2 D_2^2 + k_1 D_1^2)\theta - 2(a_2 D_2^2 + a_1 D_1^2)\dot{\theta}$$

2.4 Les oscillations verticales en z et les oscillations de tangage en θ sont découplées si : $\frac{k_1}{k_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{D_2}{D_1}$.

$$\ddot{z} + 2\frac{a_1}{M}\left(1 + \frac{D_1}{D_2}\right)\dot{z} + 2\frac{k_1}{M}\left(1 + \frac{D_1}{D_2}\right)z = 0$$

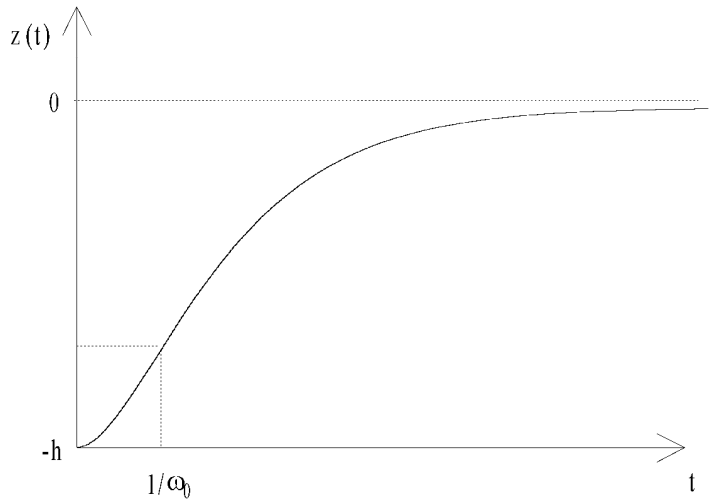
2.5 On en déduit : $\ddot{\theta} + 2\frac{a_1 D_1}{J}(D_1 + D_2)\dot{\theta} + 2\frac{k_1 D_1}{J}(D_1 + D_2)\theta = 0$.

2.6 Le retour à l'équilibre le plus bref possible est obtenu lorsque le régime de fonctionnement du système de suspension est critique, c'est-à-dire lorsque le discriminant de l'équation caractéristique associée $r^2 + Ar + B = 0$ est nul :

$\Delta = A^2 - 4B = 0$ d'où $A = 2\sqrt{B}$. On en déduit : $a_1 = \sqrt{\frac{2k_1 M D_2}{D_1 + D_2}}$.

2.7 La racine double est alors : $r = -A/2 = -\sqrt{B} = -\omega_0$, et la solution $z(t)$ est de la forme $z(t) = (Ct + D)\exp(-\omega_0 t)$, avec $z(0) = -h = D$; $\dot{z}(0) = 0 = C - \omega_0 D$ donc $C = -\omega_0 h$, d'où : $z(t) = -h(\omega_0 t + 1)\exp(-\omega_0 t)$

2.8 $\dot{z}(t) = h\omega_0^2 t\exp(-\omega_0 t)$, et $\ddot{z}(t) = h\omega_0^2(1 - \omega_0 t)\exp(-\omega_0 t)$ s'annule pour $t = 1/\omega_0$ avec $z(1/\omega_0) = -2h/e = -0{,}73h$. D'où le graphe :



2.9 Pour que le régime de tangage soit également critique, il faut que le discriminant de l'équation caractéristique soit nul, soit : $4\frac{a_1^2 D_1^2}{J^2}(D_1+D_2)^2 = 8\frac{k_1 D_1}{J}(D_1+D_2)$:

$$J = MD_1D_2 \,.$$

3.1 En charge, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{z} + 2\frac{a_1}{M+4m}\left(1+\frac{D_1}{D_2}\right)\dot{z} + 2\frac{k_1}{M+4m}\left(1+\frac{D_1}{D_2}\right)z = 0 \,.$$

3.2 Le discriminant de l'équation caractéristique associée est :

$$\Delta = 4\frac{a_1^2}{(M+4m)^2}\left(1+\frac{D_1}{D_2}\right)^2 - 8\frac{k_1}{M+4m}\left(1+\frac{D_1}{D_2}\right) = \frac{8k_1M}{(M+4m)^2}\left(1+\frac{D_1}{D_2}\right) - 8\frac{k_1}{M+4m}\left(1+\frac{D_1}{D_2}\right)$$

$$\Delta = -\frac{32k_1m}{(M+4m)^2}\left(1+\frac{D_1}{D_2}\right) < 0 \,.$$

Les racines sont donc complexes, et par conséquent, la solution $z(t)$ est une sinusoïde amortie exponentiellement (oscillations pseudo-périodiques).

3.3 On en déduit : $r = -\frac{a_1}{M+4m}\left(1+\frac{D_1}{D_2}\right) \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ d'où la pulsation $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$,

$$\omega = \sqrt{\frac{8k_1m}{(M+4m)^2}\left(1+\frac{D_1}{D_2}\right)}$$ et la période $$T = \frac{\pi(M+4m)}{\sqrt{2k_1m\left(1+\frac{D_1}{D_2}\right)}} \,.$$

3.4 Si $T = \pi/3$, $k_1 = 52920$ N.m^{-1} et $a_1 \approx 8000$ kg.s^{-1}.

II. Etude de la réponse harmonique

1.1 La distance entre deux bosses successives (période spatiale) est donnée par $\gamma\lambda = 2\pi$ donc : $\lambda = \frac{2\pi}{\gamma}$. La pulsation s'en déduit par : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda} v = \gamma v$.

1.2 L'application du théorème de la résultante cinétique au châssis chargé s'écrit, après division par 4 et projection sur $\vec{u}_z$ dans le référentiel terrestre :

$$\frac{M+4m}{4}\ddot{s} = -k(s-s') - a(\dot{s}-\dot{s}') + k(s-s')_{équilibre}$$

Appliqué à l'ensemble {roue,essieu,pneu}, il s'écrit :

$m'\ddot{s}' = -k'(s'-e) - a'(\dot{s}'-\dot{e}) + k'(s'-e)_{équilibre}$. On obtient donc :

$$\ddot{s}' + \frac{a'}{m'}\dot{s}' + \frac{k'}{m'}s' = \frac{a'}{m'}\dot{e} + \frac{k'}{m'}e + C_1^{te}$$
$$\ddot{s} + \frac{4a}{M+4m}\dot{s} + \frac{4k}{M+4m}s = \frac{4k}{M+4m}s' + \frac{4a}{M+4m}\dot{s}' + C_2^{te}$$

soit : $\ddot{s}' + C'\dot{s}' + D's' = C'\dot{e} + D'e + C_1^{te}$ et $\ddot{s} + C\dot{s} + Ds = Ds' + C\dot{s}' + C_2^{te}$,

avec $C' = \frac{a'}{m'}$, $D' = \frac{k'}{m'}$, $C = \frac{4a}{M+4m}$, $D = \frac{4k}{M+4m}$.

2.1 Le régime forcé permanent est le régime d'oscillations sinusoïdales de pulsation ω imposé au système une fois le régime transitoire disparu. Il correspond à la solution particulière de l'équation différentielle, de forme sinusoïdale et de pulsation ω.

2.2 En posant $\underline{s} = \underline{S}\exp(j\omega t)$, $\underline{s}' = \underline{S}'\exp(j\omega t)$, $\underline{e} = e_m \exp(j\omega t)$, on obtient :

$$\underline{S}'(-\omega^2 + jC'\omega + D') = e_m(jC'\omega + D') \quad \text{et} \quad \underline{S}(-\omega^2 + jC\omega + D) = \underline{S}(jC\omega + D)$$

$$\underline{S} = e_m \frac{(jC'\omega + D')(jC\omega + D)}{(D' - \omega^2 + jC'\omega +)(D - \omega^2 + jC\omega)} = e_m \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{Q'\omega_0'}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0'^2} + j\frac{\omega}{Q'\omega_0'}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)}$$

d'où :

avec :

$$\omega_0 = \sqrt{D} = 2\sqrt{\frac{k}{M+4m}}\,, \qquad Q = \frac{\sqrt{D}}{C} = \frac{\sqrt{k(M+4m)}}{2a}\,, \qquad \omega'_0 = \sqrt{D'} = \sqrt{\frac{k'}{m'}}\,,$$

$$Q' = \frac{\sqrt{D'}}{C'} = \frac{\sqrt{k'm'}}{a'}$$

2.3 k' infini (pneus rigides) : $S = e_m\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{\Omega^2}{Q^2}}{\left(1-\Omega^2\right)^2+\dfrac{\Omega^2}{Q^2}}}$. Si $\Omega = 1$, $S = e_m\sqrt{1+Q^2}$

$$\left(\frac{S}{e_m}\right)^2 = \frac{1+\dfrac{u}{Q^2}}{(1-u)^2+\dfrac{u}{Q^2}}$$

2.4 On pose $u = \Omega^2$ et on dérive par rapport à u.

La dérivée s'annule si on a : $\dfrac{1}{2Q^2}u^2 + u - 1 = 0$. Cette équation n'a qu'une seule racine positive qui est : $u_m = Q^2\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{Q^2}}-1\right)$.

La pulsation réduite de résonance est donc : $\Omega_m = Q\sqrt{\sqrt{1+\dfrac{2}{Q^2}}-1}$

$$\left(\frac{S_m}{e_m}\right)^2 = \frac{1+\dfrac{u_m}{Q^2}}{(1-u_m)^2+\dfrac{u_m}{Q^2}}$$ avec $\dfrac{1}{2Q^2}u_m^2 + u_m - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{u_m}{Q^2} = \dfrac{2-2u_m}{u_m}$ donc

$$\left(\frac{S_m}{e_m}\right)^2 = \frac{\dfrac{2-u_m}{u_m}}{1-2u_m+u_m^2+\dfrac{2-u_m}{u_m}} = \frac{2-u_m}{(2-u_m)(1-u_m^2)} = \frac{1}{1-\Omega_m^4}$$

$$\frac{S_m}{e_m} = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_m^4}}$$

2.5 $Q = \dfrac{\sqrt{35000\times 1400}}{2\times 7000} = 0{,}5$; $\Omega_m = 0{,}5\sqrt{\sqrt{1+\dfrac{2}{0{,}5^2}}-1} = 0{,}71$; $\dfrac{S_m}{e_m} = \sqrt{\dfrac{1}{1-1/4}} = 1{,}15$.

2.6 $T_1(\Omega) = 20\log\left(\frac{S}{e_m}\right)$: $T_1 \to 0$ qd $\Omega \to 0$; $T_1(\sqrt{2}) = 0$;

Si $\Omega >> 1$ $T_1 \to 20\log\frac{1}{Q} - 20\log\Omega$. D'où le diagramme de Bode après 2.8.

2.7 $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{35000}{1400}} = 10$ rad/s ; $\lambda_m = \frac{2\pi v}{\omega_m} = \frac{2\pi v}{\omega_0 \Omega_m} = \frac{2\pi \times 90}{10 \times 0{,}71 \times 3{,}6} = 22$ m.

Si $\lambda < \lambda_m$, $\omega > \omega_m$: les oscillations du châssis diminuent d'autant plus que les déformations de la route sont plus rapprochées.

2.8 k' fini et a' nul :

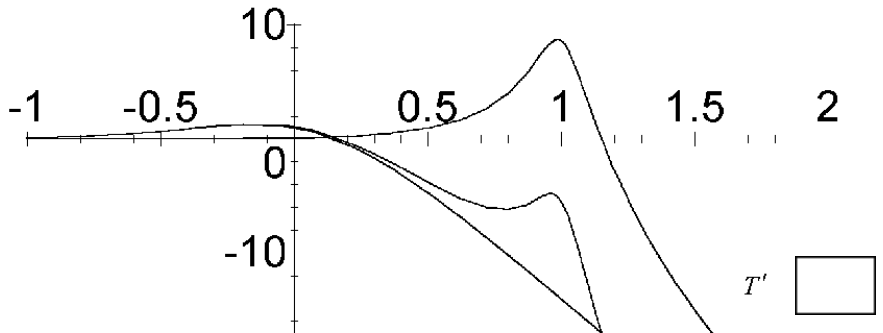
$$T_2 = 20\log\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\Omega^2}{Q^2}}{\left(1-\Omega^2\right)^2+\frac{\Omega^2}{Q^2}}}\right) + 20\log\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\Omega'^2}{Q'^2}}{\left(1-\Omega'^2\right)^2+\frac{\Omega'^2}{Q'^2}}}\right)$$ avec $\Omega' = \frac{\omega}{\omega'_0} = \frac{\omega}{10\omega_0} = \frac{\Omega}{10}$

et $Q' = 2.5$.

En posant $$T' = 20\log\left(\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\Omega}{25}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{10}\right)^2\right)^2+\left(\frac{\Omega}{25}\right)^2}}\right)$$, on peut tracer l'allure de T' sur le même diagramme de Bode, T_2 étant obtenue simplement en additionnant les deux.

Par transposition , $\Omega'_m = 2{,}5\sqrt{\sqrt{1+2/2{,}5^2}-1} \approx 1$ et $\frac{S'_m}{e_m} = \sqrt{\frac{1}{1-0{,}96^4}} \approx 2{,}7$.

Si $\Omega' \to \infty$ alors $T' \to 20\log\frac{1}{Q'} - 20\log\Omega' = 12 - 20\log\Omega$.



2.9 Les pneus assurent un filtrage passe-bas des vibrations de fréquences élevées qui se superpose à la réponse passe-bas de la suspension, ce qui confère à l'ensemble { suspension-pneus} une atténuation de –40dB/décade des fréquences élevées.

L'atténuation de l'ensemble est supérieure à celle de la seule suspension dès que $T' < 0$, c'est-à-dire par résolution graphique , $\Omega \geq 15$, soit $\omega \geq 15\omega_0 = 150$ rad/s, soit finalement $\lambda \leq 1$ m.

ANALOGIE ELECTRIQUE

1.1 $$\underline{Z} = \underline{Z_c} + \frac{1}{\underline{Y_R} + \underline{Y_L}} = \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{1}{jC\omega} + \frac{\omega jRL}{R + jL\omega}$$

1.2 $$\underline{Z} = \frac{R + jL\omega - RLC\omega^2}{jC\omega(R + jL\omega)} = \frac{1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega}{jC\omega(1 + j\frac{L}{R}\omega)} \Rightarrow \frac{1 + j\frac{L}{R}\omega}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega} = \frac{1}{jC\omega\underline{Z}} = \frac{\underline{\underline{Z_c}}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{\underline{U_s}}}{\underline{U_e}}$$

On constate donc que si on choisit : $\underline{G_e} = \underline{U_e}$ et $\underline{G_s} = \underline{U_s}$, la fonction de transfert $\frac{\underline{\underline{U_s}}}{\underline{U_e}}$ obtenue est bien de la forme $\frac{1 + j\frac{\Omega}{Q}}{1 - \omega^2 + j\frac{\Omega}{Q}}$, avec :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

1.3 La fonction de transfert de la suspension seule est : $\frac{\underline{S}}{e_m} = \frac{1 + j\frac{a}{k}\omega}{1 - \frac{m + M/4}{k}\omega^2 + j\frac{a}{k}\omega}$

.

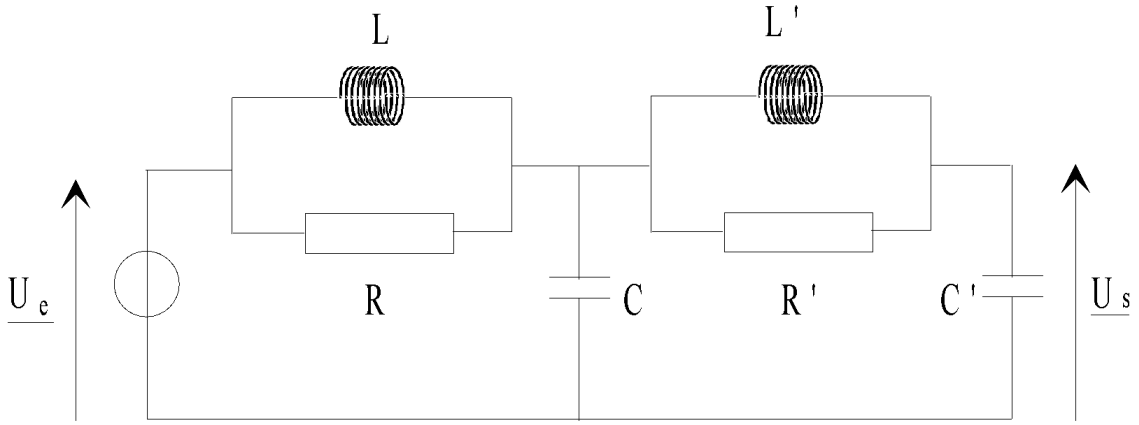
Par analogie, les équivalences électromagnétiques suivantes apparaissent :

$$\frac{a}{k} \equiv \frac{L}{R}, \quad \frac{m + M/4}{k} \equiv LC, \quad Q_{méc} = \frac{1}{a}\sqrt{k(m + M/4)} \equiv Q_{élec} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$.

Dans le système mécanique , l'énergie dissipée est issue de la force de frottement $a(\dot{x}-\dot{z})$ alors que dans le système électrique, elle provient de l'effet Joule $W_J = \int \frac{U_R^2}{R} dt$; Plus précisément, la puissance dissipée est proportionnelle à a dans le système mécanique et à $\frac{1}{R}$ dans le système électrique. On peut donc établir les équivalences : $a \equiv \frac{1}{R} \quad k \equiv \frac{1}{L} \quad m + M/4 \equiv C$.

Comme la puissance dissipée est $a\overline{(\dot{x}-\dot{z})^2}$ avec $\underline{\dot{x}} - \underline{\dot{z}} = \underline{\dot{e}} \frac{\omega^2}{D - \omega^2 + jC\omega}$, elle est proportionnelle à $av_m^2 = a(e_m\omega)^2$, donc les vitesses $\dot{e}$ et $\dot{x}$ sont les grandeurs équivalentes aux tensions U_e et U_s : $\dot{e} \equiv U_e \quad \dot{x} \equiv U_s$.

2. Les analogies précédentes et l'expression de la fonction de transfert du système {suspensions-pneus} conduisent au schéma électrique équivalent suivant :



$$R' \equiv \frac{1}{a'}, \quad L' \equiv \frac{1}{k'}, \quad C' \equiv m', \quad L'C' \equiv \frac{LC}{100}, \quad \frac{R'}{L'} = 50\frac{R}{L}$$