

Paolo Houillon

I. Fonction valeur absolue : définition, représentation graphique, propriétés
Résoudre l'équation

$$|-7x - 3| = 13$$

II. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (-2x + 7)^{-6}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition. Calcule la dérivée de f .
3. Donner le tableau de variations de f en justifiant bien les variations.
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 3$

III. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Le maximum des deux nombres x et y est noté $\max(x; y)$. De même, $\min(x; y)$ désigne le minimum de x et y .

1. Démontrer que

$$(x; y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \text{ et } (x; y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

2. Trouver une formule similaire pour $(x; y; z)$ le maximum des trois nombres x, y et z .

Enzo Hisler

I. Fonction puissance réelle $x \mapsto x^\alpha$: définition, propriétés algébriques, dérivée, dérivée de u^α

II. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 15}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f ? Calcule la dérivée de f
3. Dresser le tableau de variations de f
4. Justifier que si $1 + x \in D_f$ alors $1 - x \in D_f$. Calculer alors $f(1 + x)$ et $f(1 - x)$ en précisant pour quelles valeurs de x ces quantités peuvent être calculées. Que remarque-t-on ? En donner une interprétation géométrique.

Yassine Kalai

I. Fonction partie entière : définition, représentation graphique, propriétés
Résoudre l'équation

$$\lfloor 2x + 5 \rfloor = 3$$

II. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln \ln(-x^2 + x + 6)$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ? Calculer la dérivée de f
3. Dresser le tableau de variations de f .

III. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On définit deux nouvelles fonctions p et i définies sur $\mathbb{R}$ par

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

1. Justifier que les fonctions p et i sont respectivement paire et impaire.
2. En déduire que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ se décompose comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
3. Cette décomposition est-elle unique ?

Paolo Houillon

I. Fonction valeur absolue : définition, représentation graphique, propriétés
Résoudre l'équation

$$|-7x - 3| = 13$$

$$|-7x - 3| = 13 \Leftrightarrow (-7x - 3 = -13) \vee (-7x - 3 = 13) \Leftrightarrow (-7x = -10) \vee (-7x = 16)$$

$$S = \left\{ -\frac{16}{7}; \frac{10}{7} \right\}$$

II. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (-2x + 7)^{-6}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

$$f(x) = (-2x + 7)^{-6} = \frac{1}{(-2x+7)^6}$$

est défini si

$$-2x + 7 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{7}{2}$$

Donc

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\}$$

2. Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition. Calcule la dérivée de f .

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\}$,

$$f'(x) = -6 \times (-2) \times (-2x + 7)^{-7} = \frac{12}{(-2x+7)^7}$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $-2x + 7$

3. Donner le tableau de variations de f en justifiant bien les variations.

x	$-\infty$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
f	0 $\nearrow$ $+\infty$		$+\infty$ $\searrow$ 0

Remarquons que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\}, f(x) > 0$$

Donc, par quotient des limites,

Et

$$f(x) = f(x) = +\infty$$

$$f(x) = f(x) = 0$$

4. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 3$
L'équation de la tangente en $a = 3$ est donnée par

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Or,

$$f(3) = \frac{1}{(-2 \times 3 + 7)^6} = 1$$

$$f'(3) = \frac{12}{(-2 \times 3 + 7)^7} = 12$$

Donc, l'équation est $y = 12(x - 3) + 1$ soit
 $y = 12x - 35$

III. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Le maximum des deux nombres x et y est noté $\max(x; y)$. De même, $\min(x; y)$ désigne le minimum de x et y .

1. Démontrer que

$$(x; y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \text{ et } (x; y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{y+x+|y-x|}{2} \text{ et } \frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{y+x-|y-x|}{2}$$

Donc, on peut, sans restreindre la généralité, supposer que $x \geq y$. Or, dans ce cas,

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = x = \max(x; y)$$

$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(x-y)}{2} = y = \min(x; y)$$

2. Trouver une formule similaire pour $(x; y; z)$ le maximum des trois nombres x, y et z .

Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x; y; z) = ((x; y); z) = \left(\frac{x+y+|x-y|}{2}; z \right)$$

$$(x; y; z) = \frac{1}{2} \left(\frac{x+y+|x-y|}{2} + z + \left| \frac{x+y+|x-y|}{2} - z \right| \right)$$

$$(x; y; z) = \frac{1}{4} (x + y + |x - y| + 2z + |x + y + |x - y| - 2z|)$$

Enzo Hisler

I. Fonction puissance réelle $x \mapsto x^\alpha$: définition, propriétés algébriques, dérivée, dérivée de u^α

II. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 15}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 15} \text{ est défini si } -x^2 + 2x + 15 \geq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 60 = 64 > 0$$

L'expression $-x^2 + 2x + 15$ admet donc deux racines

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 8}{-2} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 8}{-2} = -3$$

L'expression $-x^2 + 2x + 15$ est du signe de $a = -1$ à l'extérieur de ses racines donc
 $D_f = [-3; 5]$

2. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f ? Calcule la dérivée de f

f est dérivable sur $] -3; 5[$ en tant que composée de la fonction racine et d'une fonction dérivable et strictement positive sur $] -3; 5[$

Soit $x \in] -3; 5[$,

$$f'(x) = \frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+15}} = \frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+15}}$$

$f'(x)$ est donc du signe de $-x + 1$

3. Dresser le tableau de variations de f

x	-3	1	5
$f'(x)$	+	0	-
f	0	4	0

$$f(1) = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}} = \sqrt{\frac{64}{4}} = 4$$

Remarques

- En notant que

$$-x + 1 = 4 \text{ et } -x + 1 = -4$$

On peut affirmer que, par quotient des limites,

$$f'(x) = +\infty \text{ et } f'(x) = -\infty$$

On en déduit que la courbe représentative de f possède deux tangentes verticales en -3 et en 5

- La courbe représentative de f est en fait un demi-cercle de centre $(1; 0)$ et de rayon 4 . On peut le voir en remarquant que, soit $x \in [-3; 5]$,

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 15} = \sqrt{-(x^2 - 2x \times 1 + 1^2) + 1 + 15} = \sqrt{4^2 - (x - 1)^2}$$

En posant $y = f(x) \geq 0$, on retrouve l'équation d'un cercle de centre $(1; 0)$ et de rayon 4 en passant au carré (on n'obtient ici qu'un demi-cercle car on se limite aux valeurs de y positives)

$$(x - 1)^2 + y^2 = 4^2$$

4. Justifier que si $1 + x \in D_f$ alors $1 - x \in D_f$. Calculer alors $f(1 + x)$ et

$f(1 - x)$ en précisant pour quelles valeurs de x ces quantités peuvent être calculées. Que remarque-t-on ? En donner une interprétation géométrique.

$$1 + x \in D_f \Leftrightarrow 1 + x \in [-3; 5] \Leftrightarrow -3 \leq 1 + x \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq -x \leq 4 \Leftrightarrow -$$

Soit $x \in [-4; 4]$,

$$f(1 + x) = \sqrt{-(1 + x)^2 + 2(1 + x) + 15} = \sqrt{-1 - 2x - x^2 + 2 + 2x + 15}$$

$$f(1 + x) = \sqrt{16 - x^2}$$

$$f(1 - x) = \sqrt{-(1 - x)^2 + 2(1 - x) + 15} = \sqrt{-1 + 2x - x^2 + 2 - 2x + 15}$$

$$f(1 - x) = \sqrt{16 - x^2} = f(1 + x)$$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est un **axe de symétrie vertical** pour la courbe représentative de f .

Yassine Kalai

I. Fonction partie entière : définition, représentation graphique, propriétés

Résoudre l'équation

$$[2x + 5] = 3$$

$$[2x + 5] = 3 \Leftrightarrow 3 \leq 2x + 5 < 4 \Leftrightarrow -2 \leq 2x < -1 \Leftrightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2}$$

$$S = [-1; -\frac{1}{2}[$$

II. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln \ln (-x^2 + x + 6)$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

$$f(x) = \ln \ln (-x^2 + x + 6) \text{ est défini si } -x^2 + x + 6 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25 > 0$$

L'expression $-x^2 + x + 6$ admet donc deux racines

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{-2} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{-2} = -2$$

L'expression $-x^2 + x + 6$ est du signe de $a = -1$ à l'extérieur de ses racines donc

$$D_f =]-2; 3[$$

2. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ? Calculer la dérivée de f est dérivable sur $] - 2; 3[$ en tant que composée de la fonction logarithme et d'une fonction dérivable et strictement positive sur $] - 2; 3[$
Soit $x \in] - 2; 3[$,

$$f'(x) = \frac{-2x+1}{-x^2+x+6}$$

$f'(x)$ est donc du signe de $-2x + 1$

3. Dresser le tableau de variations de f .

x	-2	$\frac{1}{2}$	3
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	$2 \ln \left(\frac{5}{2} \right)$	$-\infty$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \ln \left(-\frac{\Delta}{4a}\right) = \ln \ln \left(\frac{25}{4}\right) = 2 \ln \ln \left(\frac{5}{2}\right)$$

Notons que

$$-x^2 + x + 6 = -x^2 + x + 6 = 0^+$$

On en déduit que, par composition avec la fonction logarithme,

$$f(x) = f(x) = -\infty$$

On en déduit que la courbe représentative de f possède deux asymptotes verticales d'équations $x = -2$ et $x = 3$

III. Soit $f: R \rightarrow R$. On définit deux nouvelles fonctions p et i définies sur R par

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

1. Justifier que les fonctions p et i sont respectivement paire et impaire.

Notons que R est symétrique par rapport à 0 et, soit $x \in R$,

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$$

Donc p est paire.

$$i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x)$$

Donc i est impaire.

2. En déduire que toute fonction définie sur R se décompose comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Soit $x \in R$, on note que

$$f(x) = p(x) + i(x)$$

Une fonction définie sur R se décompose donc comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

3. Cette décomposition est-elle unique ?

Supposons que

$$f = p_1 + i_1 = p_2 + i_2$$

Où p_1 et p_2 sont des fonctions paires et i_1 et i_2 sont des fonctions impaires. On en déduit que

$$p_1 - p_2 = i_2 - i_1$$

Or, soit $x \in R$,

$$p_1(-x) - p_2(-x) = p_1(x) - p_2(x)$$

Donc $p_1 - p_2$ est paire

$$i_2(-x) - i_1(-x) = -i_2(x) + i_1(x) = -(i_2(x) - i_1(x))$$

Donc $i_2 - i_1$ est impaire

On en déduit que les fonctions $p_1 - p_2$ et $i_2 - i_1$ sont à la fois paires et impaires donc elles sont nulles et

$$p_2 = p_1, i_2 = i_1$$

La décomposition est donc unique.