



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
 COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2024	CONVOCATORIA: JULIO 2024
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BAREMO DEL EXAMEN: Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen. Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2500 unidades de tinta y de 3000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0,5 euros y por cada uno de los sofisticados 0,7 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias? (8 puntos)

b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas? (2 puntos)

Resolución

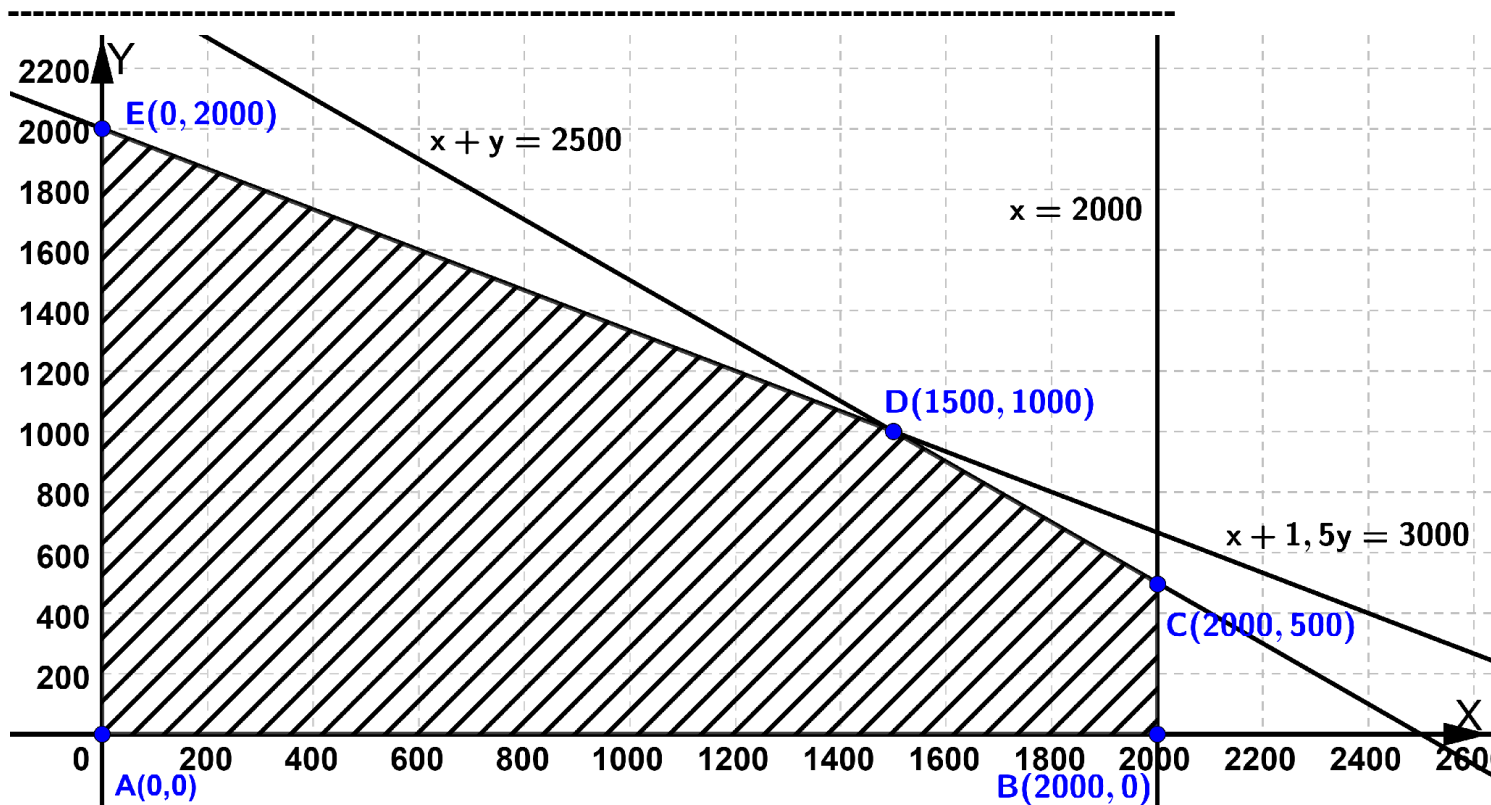
Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de unidades	unidades de tinta	unidades de plástico	ganancias (en €)
modelo sencillo	x	1x	1x	0,5x
modelo sofisticado	y	1y	1,5y	0,7y
total	x + y	x + y	x + 1,5y	0,5x + 0,7y

Función a maximizar, las ganancias $f(x, y) = 0,5x + 0,7y$.

Restricciones: $\{x + y \leq 2500 \quad x + 1,5y \leq 3000 \quad x \leq 2000 \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Veamos en qué vértice alcanza el valor máximo las ganancias $f(x, y) = 0,5x + 0,7y$

$$f(A) = f(0, 0) = 0,5 \cdot 0 + 0,7 \cdot 0 = 0 \quad f(B) = f(2000, 0) = 0,5 \cdot 2000 + 0,7 \cdot 0 = 1000$$

$$f(C) = f(2000, 500) = 0,5 \cdot 2000 + 0,7 \cdot 500 = 1350$$

$$f(D) = f(1500, 1000) = 0,5 \cdot 1500 + 0,7 \cdot 1000 = 1450 \quad f(E) = f(0, 2000) = 0,5 \cdot 0 + 0,7 \cdot 2000 = 1400$$

Las ganancias máximas son 1450 € produciendo 1500 bolígrafos sencillos y 1000 sofisticados

Problema 2. Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Analiza si la matriz $AB - 2I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 puntos)

Resolución

$$AB - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \det (AB - 2I) = 12 + 18 = 30 \neq 0. \text{ Luego, } AB - 2I \text{ es invertible}$$

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2XC = B^t$, siendo B^t la traspuesta de la matriz B . (4 puntos)

Resolución

$$\text{Trasponiendo términos, } 2XC = B^t - A. \text{ Multiplicando por } \frac{1}{2}, XC = \frac{1}{2} (B^t - A); \det C = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$$

Multiplicando por C^{-1} , por la derecha, $XC C^{-1} = XI = X = \frac{1}{2}(B^t - A)C^{-1}$

$$X = \frac{1}{2}(B^t - A)C^{-1} = \frac{1}{2}[(-104203) - (1001 - 13)] \frac{1}{\det C} (\text{adj } C)^t = \frac{1}{2}(-204110) \frac{1}{-1} (0 - 1 - 13)^t$$

$$X = \frac{-1}{2}(-204110)(0 - 1 - 13) = \frac{-1}{2}(02 - 1 - 10 - 1) \Rightarrow X = \left(0 - 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}\right)$$

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D = (1 - 1 - 1 z)$ cumple la condición $CD = DC$ (3 puntos)

Resolución

$$CD = DC \Rightarrow (3110)(1 - 1 - 1 z) = (1 - 1 - 1 z)(3110) \Rightarrow (2z - 31 - 1) = (21z - 3 - 1)$$

Igualando, $z - 3 = 1, z = 4$

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

Resolución

$$(3x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}. \text{ El denominador se anula para } x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}, \text{ Dom } f = \mathbb{R} - \left\{ \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \text{ (imposible)} ; f(0) = \frac{1}{(3 \cdot 0^2 - 1)^2} = 1. \text{ Solo corta al eje Y en } (0, 1)$$

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

Resolución

$$f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow f \text{ tiene una asíntota vertical de ecuación A.V.: } x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow f \text{ tiene una asíntota vertical de ecuación A.V.: } x = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow f \text{ tiene asíntota horizontal en } \pm\infty \text{ de ecuación AH: } y = 0$$

$$\text{Si } x \rightarrow \pm\infty, y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asintota}} = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} - 0 = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} > 0$$

Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en $\pm\infty$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

Resolución

$$f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} ; f'(x) = \frac{0 \cdot (3x^2 - 1)^2 - 1 \cdot 2(3x^2 - 1)6x}{(3x^2 - 1)^4} = \frac{-12x}{(3x^2 - 1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$ teniendo en cuenta que $y = 3x^2 - 1$ representa una parábola convexa que corta al eje X en $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right)$	0	$\left(0, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	$\neq$	+		-	$\neq$	+
$f(x)$	decreciente	$\neq$	creciente	máximo	decreciente	$\neq$	creciente

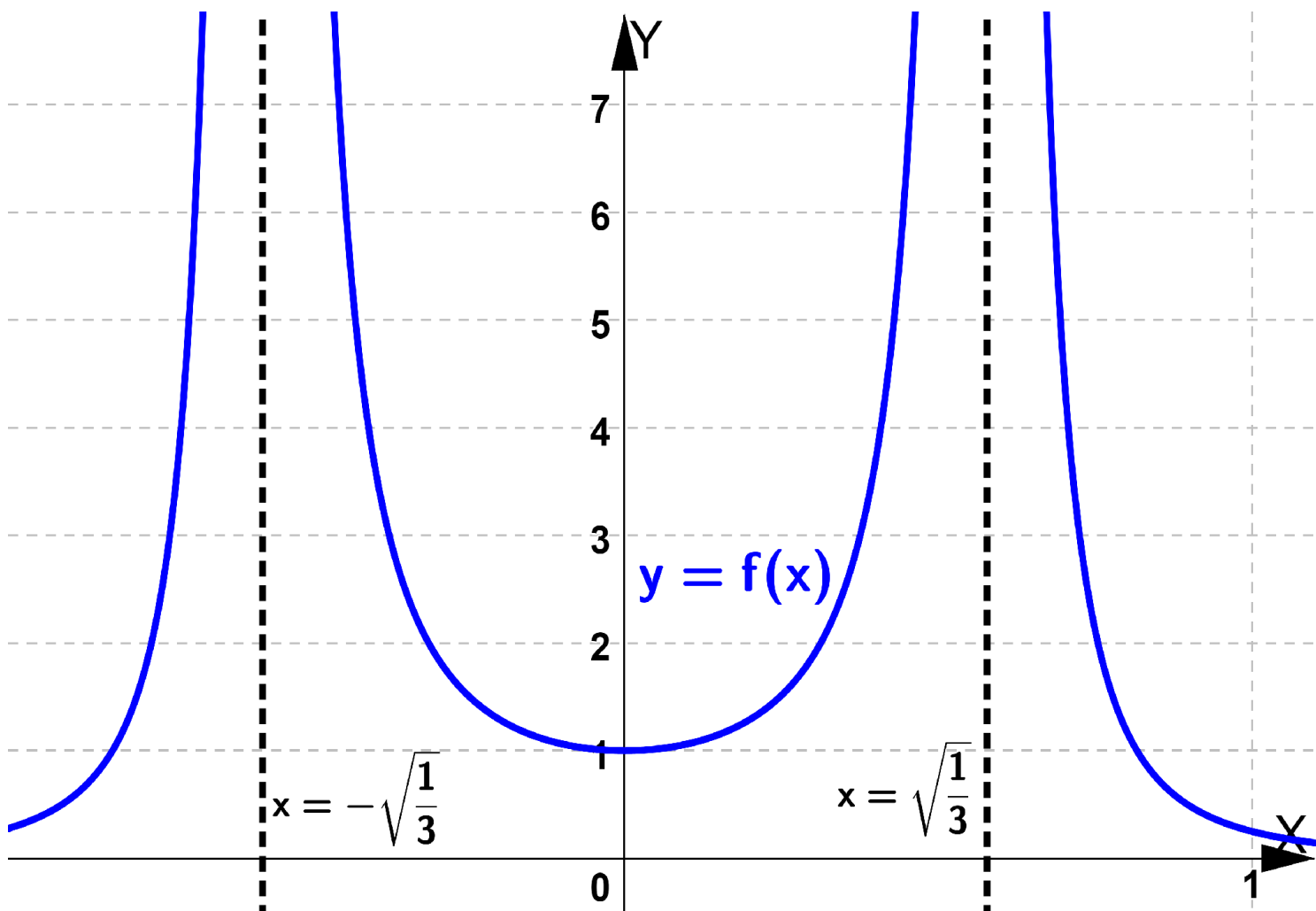
f es decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ y creciente en $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$

Máximo relativo: $x = 0, y = f(0) = 1$, punto $(0, 1)$. No hay mínimo relativo

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Resolución

La gráfica es



Problema 4. Un agricultor estima que, si aplica x kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2 + 60x + 100$ euros.

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos? (3 puntos)

Resolución

Ingresos, $I(x) = -x^2 + 60x + 100$; $I'(x) = -2x + 60 = 0 \Leftrightarrow x = 30, I(30) = -30^2 + 60 \cdot 30 + 100 = 1000$

Como $I''(x) = -2$, $I''(30) = -2 < 0$, en $x = 30$ se alcanza el máximo.

Los ingresos máximos son 1000 € y se obtiene con un abono de 30 kilos.

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos? (4 puntos)

Resolución

Como los ingresos son $I(x) = -x^2 + 60x + 100$ y los costes $C(x) = 12x$, la función beneficio es

$$B(x) = I(x) - C(x) = -x^2 + 60x + 100 - 12x = -x^2 + 48x + 100$$

$B'(x) = -2x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = 24$, $B(24) = -24^2 + 48 \cdot 24 + 100 = 676$: Como $B''(x) = -2$, $B''(24) = -2 < 0$ en $x = 24$ se alcanza el máximo. El beneficio máximo es de 676 € y se obtiene con un abono de 24 kilos.

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? (3 puntos)

Resolución

$$B(x) = -x^2 + 48x + 100 = 0, x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 48x - 100 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{48 \pm 52}{2}; x = -2 \text{ (no válida)}, x = 50$$

La gráfica de $B(x)$ es una parábola cóncava que corta al eje X en 50. Por tanto, el beneficio es negativo con un abono de más de 50 kilos.

Problema 5. Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música”. (3 puntos)

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? (4 puntos)

c) ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”? (3 puntos)

Resolución

A = estudiar ESO B = estudiar Bachillerato F = escoger fútbol G = escoger baloncesto M = escoger música

Elaboramos la siguiente tabla de contingencia:

	F	G	M	Total
A	230	60	$310 - 230 - 60 = 20$	310
B	$300 - 230 = 70$	$90 - 70 - 8 = 12$	8	$400 - 310 = 90$
Total	300	72	28	400

a) Se pide

$$p(A \cup M) = p(A) + p(M) - p(A \cap M) = \frac{310}{400} + \frac{28}{400} - \frac{20}{400} = \frac{130}{200} = \frac{318}{400} = 0,795 = 79,5\%$$

b) Hay $300 + 72 = 372$ alumnos que han elegido extraescolar deportiva. De ellos $230 + 60 = 290$ son alumnos de ESO. Aplicando la regla de Laplace, la probabilidad es $\frac{290}{372} \cong 0,7796 = 77,96\%$

$$c) p(B) P(G^c) = \frac{90}{400} \left(1 - \frac{72}{400}\right) = \frac{90}{400} \cdot \frac{328}{400} = \frac{369}{2000}; \text{ por Laplace, } p(B \cap G^c) = \frac{78}{400} = \frac{39}{2000}$$

Como $p(B) P(G^c) \neq p(B \cap G^c)$ entonces los sucesos B y G^c son dependientes

Problema 6. Una empresa de vacunas para ganado bovino está evaluando la efectividad de dos métodos

distintos, A y B, para administrar una vacuna contra virus que afectan al aparato respiratorio. En el estudio, de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30% de las reses vacunadas por el método A, el 20% de las vacunadas por el método B y el 60% de las no vacunadas. Calcula:

- a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios. (3 puntos)
- b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B. (4 puntos)
- c) La probabilidad de la intersección de los sucesos “la res no ha sido vacunada” y “la res tiene problemas respiratorios” (3 puntos)

Resolución

A = ser vacunada con el método A B = ser vacunada con el método B C = no ser vacunada

R = tener problemas respiratorios. Elaboramos la siguiente tabla de contingencia:

	A	B	C	Total
R	30% de 250 = 75	20% de 250 = 50	60% de 100 = 60	185
R ^c	250 - 75 = 175	250 - 50 = 200	100 - 60 = 40	415
Total	250	250	600 - 250 - 250 = 100	600

a) Se pide $p(R) = \frac{185}{600} = \frac{37}{120} \cong 0,3083 = 30,83\%$

b) Se pide $p\left(\frac{B}{R^c}\right) = \frac{p(R^c \cap B)}{p(R^c)} = \frac{\frac{200}{600}}{\frac{415}{600}} = \frac{200}{415} = \frac{40}{83} \cong 0,4819 = 48,19\%$

c) Se pide $p(C \cap R) = \frac{60}{600} = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$