



PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PAU
CURSO 2024-2025

MATERIA: Matemáticas Aplicadas a las CCSS II

Convocatoria: JUNIO_VIERNES_6

Instrucciones: La pregunta 1 es obligatoria. Además, elegir un máximo de 3 preguntas, eligiendo UNA entre 2A y 2B, UNA entre 3A y 3B y UNA entre 4A y 4B.

1. El precio de alquiler, PA, de pisos de dos habitaciones de una gran ciudad sigue una distribución normal.

a) Si, para una muestra de 400 pisos de dos habitaciones, con una confianza del 99%, se ha obtenido [1174,25 ; 1225,75] como el intervalo para la media de PA, ¿cuál es la desviación típica de PA?

(0,75 puntos)

Resolución

$X = \text{precio, en } \text{€} \rightarrow N(\mu, \sigma)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 99% para estimar la media, μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x}$ la media de la muestra de tamaño $n = 400$ y $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ el máximo error de estimación.

Nos dan el intervalo de confianza [1174,25 ; 1225,75]

La media muestral es el punto medio del intervalo: $\bar{x} = \frac{1225,75 + 1174,25}{2} = 1200$

El error de estimación es la mitad de la amplitud del intervalo: $E = \frac{1225,75 - 1174,25}{2} = 25,75$

Por otra parte, $\frac{1 + n_c}{2} = \frac{1 + 0,99}{2} = 0,995$.

Luego, $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,995$ usando la tabla de la $N(0,1)$, por interpolación $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma = \frac{E \sqrt{n}}{z_{\alpha/2}} = \frac{25,75 \sqrt{400}}{2,575} = 200$. Es decir, la desviación típica es 200

b) Si los gastos de gestión representan el 10% del precio de alquiler, usando los datos del apartado anterior, ¿cuál sería el correspondiente intervalo de confianza, al 90%, para la media de dichos gastos de gestión? (1 punto)

Resolución

$Y = \text{gastos de gestión} \rightarrow N(\mu, 10\% \text{ de } 200) = N(\mu, 20)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza

del 90% para estimar la media, μ , es $I_c = (\bar{y} - E, \bar{y} + E)$, siendo $\bar{y} = 10\% \text{ de } 1200 = 120$ la media de la

muestra de tamaño $n = 400$ y $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

Por otra parte, $\frac{1 + n_c}{2} = \frac{1 + 0,9}{2} = 0,95$.

Luego, $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,95$ usando la tabla de la $N(0,1)$, por interpolación $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{20}{\sqrt{400}} = 1,645 ;$$

$$I_c = (120 - 1,645 ; 120 + 1,645) \cong (118,355 ; 121,645)$$

c) Usando la media muestral y la desviación típica obtenidas en a), ¿cuál es la probabilidad de que, para una muestra de 25 pisos de dos habitaciones de la referida ciudad, el precio medio de alquiler sea mayor o igual que 1250 euros? (0,75 puntos)

Resolución

X = precio del alquiler de los pisos de 2 habitaciones $\rightarrow N(1200, 200)$. Sabemos, por el teorema central del límite que si $X \rightarrow N(\mu, \sigma)$ y $\bar{X}$ = media de las muestras de tamaño n , $\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En este caso, $n = 25$. Sustituyendo, $\bar{X} \rightarrow N\left(1200, \frac{200}{\sqrt{25}}\right) = N(1200, 40) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - 1200}{40} \rightarrow N(0, 1)$

$$\text{Pide } p(\bar{X} \geq 1250) = p\left(\frac{\bar{X} - 1200}{40} \geq \frac{1250 - 1200}{40}\right) = p(Z \geq 1,25) = 1 - p(Z < 1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$$

Entonces, la probabilidad que se pide es del 10,56%

2A. Una cadena de supermercados envasa al vacío tres tipos de queso, en las siguientes proporciones: fresco (45%), semicurado (30%) y curado (25%). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 15% del queso fresco, el 23% del semicurado y el 40% del curado.

a) Representar, mediante un árbol de probabilidades, la situación descrita. (0,5 puntos)

Resolución

F = “El queso es fresco” S = “El queso es semicurado” C = “El queso es curado”

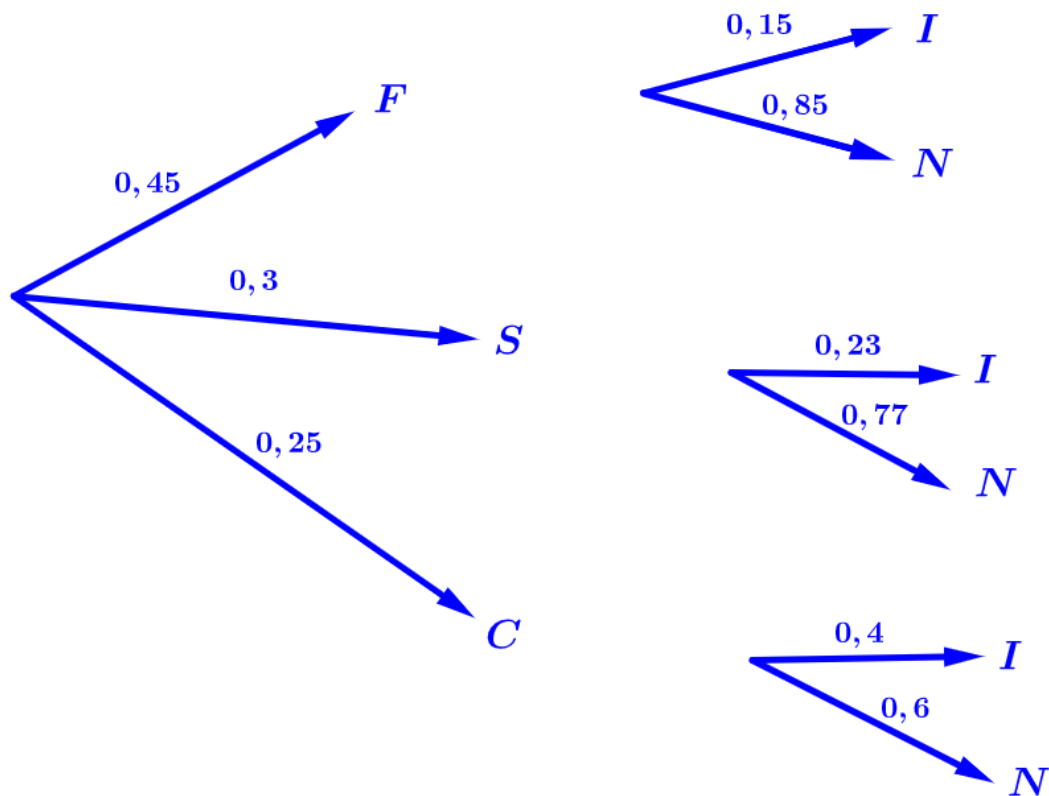
I = “El queso es de importación” N = “El queso NO es de importación”

Según el enunciado, $p(F) = 45\% = 0,45$ $p(S) = 30\% = 0,3$ $p(C) = 25\% = 0,25$

$$p(I/F) = 15\% = 0,15 \Rightarrow p(N/F) = 1 - p(I/F) = 1 - 0,15 = 0,85$$

$$p(I/S) = 23\% = 0,23 \Rightarrow p(N/S) = 1 - p(I/S) = 1 - 0,23 = 0,77$$

$$p(I/C) = 40\% = 0,4 \Rightarrow p(N/C) = 1 - p(I/C) = 1 - 0,4 = 0,6$$



b) Se elige al azar un paquete de queso, ¿cuál es la probabilidad de que no sea de importación? (1 punto)

Resolución

Nos piden $p(N)$ que usando el teorema de probabilidad total es

$$p(N) = p(F)p(N/F) + p(S)p(N/S) + p(C)p(N/C) = 0,45 \cdot 0,85 + 0,3 \cdot 0,77 + 0,25 \cdot 0,6 = 0,7636 = 76,35\%$$

c) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado? (1 punto)

Resolución Se pide $p\left(\frac{C}{I}\right) = \frac{p(C \cap I)}{p(I)} = \frac{p(C)p(I/C)}{1 - p(N)} = \frac{0,25 \cdot 0,4}{1 - 0,7635} \cong 0,4228 = 42,28\%$

2B. En una cafetería se pretende implementar una aplicación móvil que permita a los clientes escanear un código QR, ubicado en cada mesa, para realizar pedidos, pagar e incluso llamar al camarero.

Para conocer la opinión de los usuarios, se encuestó a una muestra aleatoria de 210 clientes, de los cuales 140 consideraron que este nuevo sistema ayudaría a reducir el tiempo de espera.

a) Determinar un intervalo de confianza, al 98%, para estimar la proporción de clientes que opinan que esta aplicación permitiría reducir los tiempos de espera. ¿Cuál sería el error máximo en la estimación?

(1 punto)

Resolución

La v.a. “proporción de usuarios de cada muestra, elegida al azar”, tiene una distribución Normal

$N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ donde p es la proporción poblacional, $n = 210$ el tamaño de la muestra

y $\hat{p} = \frac{140}{210} = \frac{2}{3}$ la proporción muestral. El intervalo de confianza a nivel de confianza al 98% para la

proporción poblacional, p , es $I_c = (\hat{p} - E, \hat{p} + E)$, siendo $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, el máximo error de

estimación. Se tiene que $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,98}{2} = 0,99$

$p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,99$ usando la tabla de la $N(0,1)$, por interpolación $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2,325$

Sustituyendo: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2,325 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3}(1-\frac{2}{3})}{210}} \cong 0,0756$

$$I_c \cong \left(\frac{2}{3} - 0,0756 ; \frac{2}{3} + 0,0756 \right) \cong (0,5911 ; 0,7423)$$

b) Si, realizando una nueva encuesta, se quisiese estimar la proporción de clientes que opinan que la aplicación reduciría los tiempos de espera, con un error inferior al 4% y un nivel de confianza del 96%, ¿a cuántos clientes, como mínimo, se debería preguntar si usamos como estimación inicial de la proporción la obtenida en la muestra anterior? (1 punto)

Resolución

Sabemos que $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, es el máximo error de estimación, $\hat{p} = \frac{2}{3}$;

$$\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,96}{2} = 0,98$$

$$p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,98 \text{ usando la tabla de la } N(0,1), \text{ por interpolación } \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,055$$

Piden hallar n para que

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < 0,04 \text{ elevando al cuadrado } \rightarrow (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \leq 0,04^2$$

$$\text{Despejando, } n \geq (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{0,04^2} = 2,055^2 \cdot \frac{\frac{2}{3}(1-\frac{2}{3})}{0,04^2} \cong 586,5.$$

Luego, se debería preguntar como mínimo a 587 clientes.

c) De la muestra inicial se seleccionan 9 clientes para una entrevista personal. ¿Cuál es la probabilidad de que entre esos 9 clientes haya al menos 2 que consideran que la aplicación no reducirá el tiempo de espera? (0,5 puntos)

Resolución

Como realizamos 9 veces el experimento aleatorio de elegir al azar un cliente y la probabilidad de que considere que el nuevo sistema NO ayudaría a reducir el tiempo de espera es $\frac{1}{3}$, entonces $X \rightarrow B(9 ; \frac{1}{3})$

La ley de probabilidad es $p_k = p(X = k) = \binom{9}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{9-k}$, con $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9$

La probabilidad que se pide es $p(X \geq 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - \binom{9}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^9 - \binom{9}{1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^8$

$$\text{O sea, } p(X \geq 2) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^9 - 9 \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cong 0,8569 = 85,69\%$$

3A. Un psicólogo ha colocado unos electrodos en la cabeza de un ratón para evaluar su actividad cerebral (medida en microvoltios μV) durante un experimento que ha durado 12 horas. La actividad registrada se ajustó a la siguiente función: $f(t) = \{24t^2 - 96t + 736, 0 \leq t < 4; t^3 - 30t^2 + 288t, 4 \leq t \leq 12\}$, siendo t el tiempo en horas

(de 0 a 12)

a) Estudiar la continuidad de $f(t)$. ¿Es $f(t)$ derivable en $t = 4$? (0,75 puntos)

Resolución

$f(t)$ está definida en el intervalo $[0, 12]$. Para $t \neq 4$, $f(t)$ es continua y derivable por ser continuas y

derivables las funciones polinómicas y $f'(t) = \{48t - 96, \text{ si } 0 \leq t < 4; 3t^2 - 60t + 288, \text{ si } 4 < t \leq 12$

$$\text{Como } f(t) = 24 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 + 736 = 736 = f(t) = f(4) = 4^3 - 30 \cdot 4^2 + 288 \cdot 4 = 736,$$

entonces $f(t)$ es continua en $t = 4$. Luego, $f(t)$ es continua en su dominio, $[0, 12]$

Como $f'(t) = 48 \cdot 4 - 96 = 96 = f'(t) = 3 \cdot 4^2 - 60 \cdot 4 + 288 = 96 \Rightarrow f$ es derivable en $t = 4$.

Conclusión: f es continua y derivable en su dominio, que es $[0, 12]$

b) Usando derivadas, estudiar el crecimiento y decrecimiento de esta función. ¿En qué momentos alcanzó el ratón los valores mínimo y máximo de actividad cerebral? ¿Cuáles fueron dichos valores? (1 punto)

Resolución

{Si $0 \leq t < 4$, $f'(t) = 48t - 96 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ Si $4 < t \leq 12$, $f'(t) = 3t^2 - 60t + 288 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 20t + 96$

Hagamos una tabla de signos de $f'(t)$:

	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, 8)$	8	$(8, 12)$	12
$f'(t)$	-	0	+	+	+	0	-	0
$f(t)$	decreciente	mínimo	creciente	creciente	creciente	máximo	decreciente	

f es decreciente en $(0, 2) \cup (8, 12)$ y creciente en $(2, 8)$

Evaluamos $f(t)$ en $t = 0$, $t = 2$, $t = 8$ y $t = 12$ para averiguar los máximos y mínimos absolutos:.

$$f(0) = 24 \cdot 0^2 - 96 \cdot 0 + 736 = 736 \quad f(2) = 24 \cdot 2^2 - 96 \cdot 2 + 736 = 640$$

$$f(8) = 8^3 - 30 \cdot 8^2 + 288 \cdot 8 = 896 \quad f(12) = 12^3 - 30 \cdot 12^2 + 288 \cdot 12 = 864$$

Luego, el máximo absoluto es $M(8, 896)$ y el mínimo absoluto $N(2, 640)$

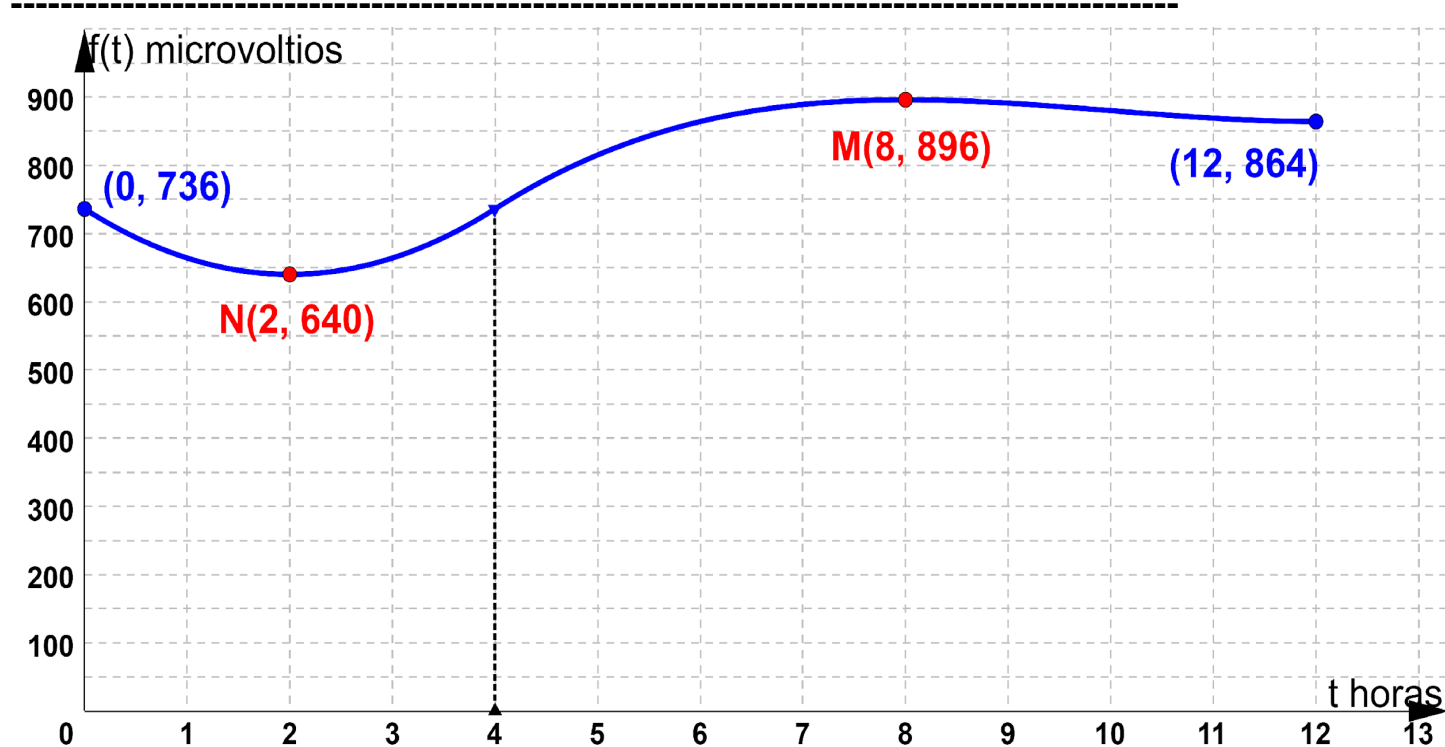
El ratón alcanzó la mínima actividad cerebral a las 2 h y fue de $640 \mu V$. La máxima actividad cerebral se produjo a las 8 h y fue de $896 \mu V$

c) Representar gráficamente la función. ¿Cuál es la actividad cerebral del ratón a las $t = 6$ horas? ¿En qué momentos anteriores la actividad cerebral fue exactamente 200 microvoltios menor?

(0,75 puntos)

Resolución

Usando los apartados anteriores la gráfica es



La actividad cerebral a las 6 h fue de $f(6) = 6^3 - 30 \cdot 6^2 + 288 \cdot 6 = 864 \mu V$

Veamos cuando la actividad cerebral es $864 - 200 = 664$

En la gráfica de la función se aprecia que este valor se alcanza antes de las 4 h:

$$24t^2 - 96t + 736 = 664, 0 \leq t < 4 \Leftrightarrow 24t^2 - 96t + 72 = 0, 0 \leq t < 4 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0, 0 \leq t < 4$$

Resolviendo, $t = \frac{4 \pm 2}{2}$, $t = 1$, $t = 3$. Se consigue en la hora 1 y en la hora 3

3B. En una plaza hay una superficie limitada por las curvas $y = 3x^2 - 5x + 3$, $y = x + 3$ con x expresado en metros, donde se quiere hacer un jardín para instalar dentro una estatua conmemorativa.

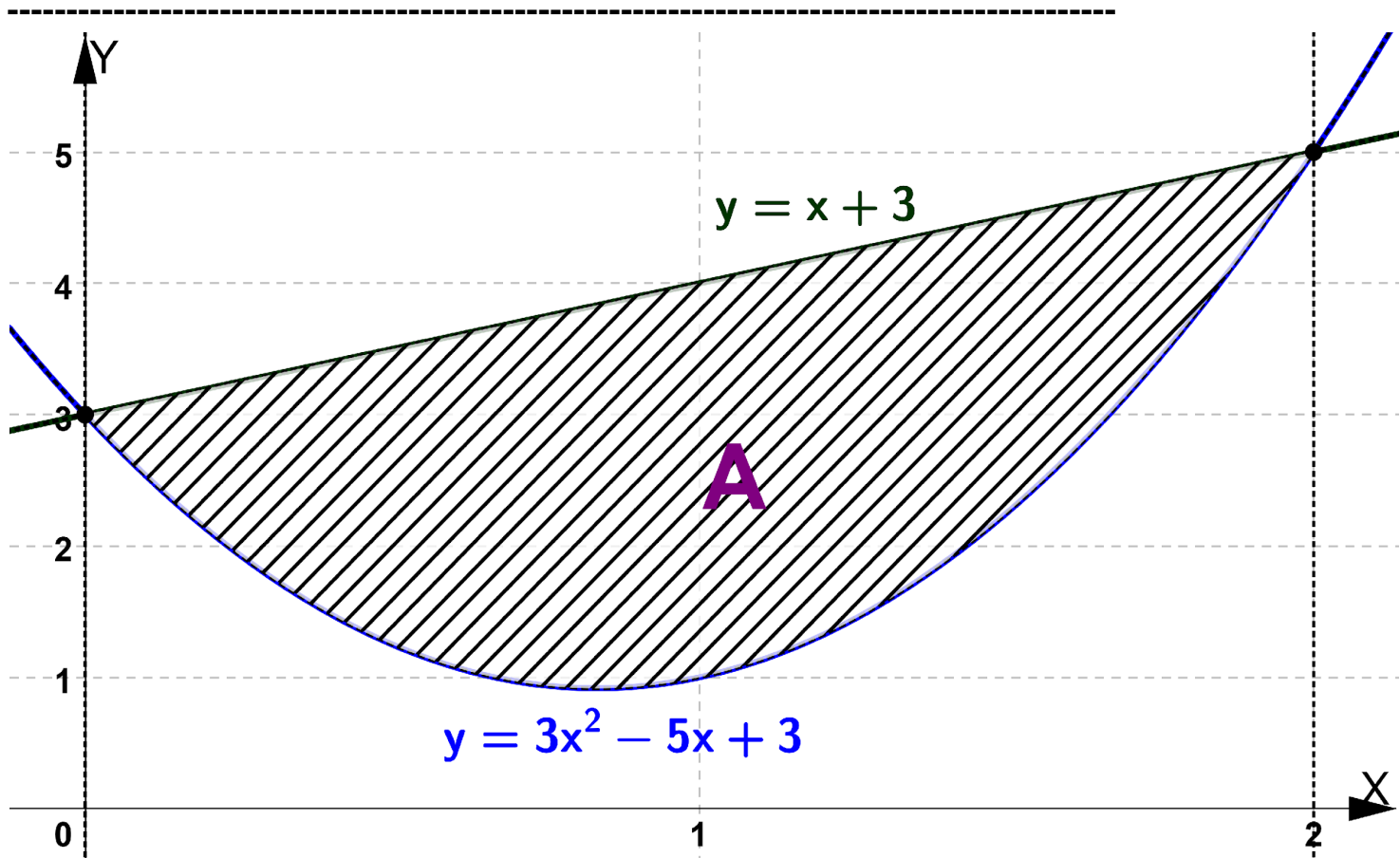
a) Representar la superficie que se destina al jardín. (0,75 puntos)

b) ¿Cuánto mide dicha superficie? (1 punto)

Resolución

$$\{y = 3x^2 - 5x + 3, y = x + 3\} \Rightarrow 3x^2 - 5x + 3 = x + 3 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0; x = 0, y = 3, x = 2, y = 5$$

Esto significa que la parábola convexa y la recta se cortan en los puntos $(0, 3)$ y $(2, 5)$.



La superficie que pide es $A = \left| \int_0^2 [3x^2 - 5x + 3 - (x + 3)] dx \right| = \left| \int_0^2 (3x^2 - 6x) dx \right|$. Una primitiva es

$p(x) = x^3 - 3x^2$. Por la regla de Barrow, $A = |p(2) - p(0)| = |2^3 - 3 \cdot 2^2 - (0^3 - 3 \cdot 0^2)| = |-4| = 4 \text{ m}^2$

c) La superficie se recubre con césped artificial, con un precio de 25,99 €/m². Para colocar el césped se requiere material adicional con un coste de 18 €/m², siendo además el coste de la mano de obra de 20 €/m². A los costes anteriores hay que añadir el impuesto que es un 7% para el césped y materiales y un 4% para la mano de obra. ¿Cuál es el coste total de la obra? (0,75 puntos)

Resolución

Coste del césped: $25,99 \text{ €/m}^2 \cdot 4 \text{ m}^2 = 103,96 \text{ €}$, el coste del material adicional: $18 \text{ €/m}^2 \cdot 4 \text{ m}^2 = 72 \text{ €}$

y el coste de la mano de obra: $20 \text{ €/m}^2 \cdot 4 \text{ m}^2 = 80 \text{ €}$

Por impuesto se paga 7% de $(103,96 \text{ €} + 72 \text{ €})$ + 4% de 80 = $0,07 \cdot 175,96 + 0,04 \cdot 80 \cong 15,52 \text{ €}$

El coste total de la obra es $175,96 \text{ €} + 80 \text{ €} + 15,52 \text{ €} = 271,48 \text{ €}$.

4A. El Ayuntamiento dispone de un presupuesto de 4000 € para ampliar la capacidad de almacenamiento de su centro de datos, al que se encuentran conectados los 700 ordenadores que dan servicio a la administración. Para ello, el Ayuntamiento puede adquirir discos duros SATA de 9,6 terabytes (Tb) y discos duros SSD de 1,2 Tb de capacidad. Cada disco SATA es capaz de dar servicio a 100 ordenadores y cuesta 200 €.

En cambio, los discos SSD pueden dar servicio a un máximo de 50 ordenadores y cuestan 100 € cada uno. De acuerdo con un estudio realizado por los técnicos, para garantizar una adecuada calidad de servicio,

será necesario instalar como mínimo 30 discos duros en total, con al menos una unidad de cada tipo de disco.

- Formular el correspondiente programa de programación lineal. (1 punto)
- Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (0,75 puntos)
- ¿Cuántos aparatos de cada tipo deben instalarse para conseguir la máxima capacidad de almacenamiento? Una vez instalados, ¿cuál es la capacidad media disponible por ordenador? (0,75 puntos)

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

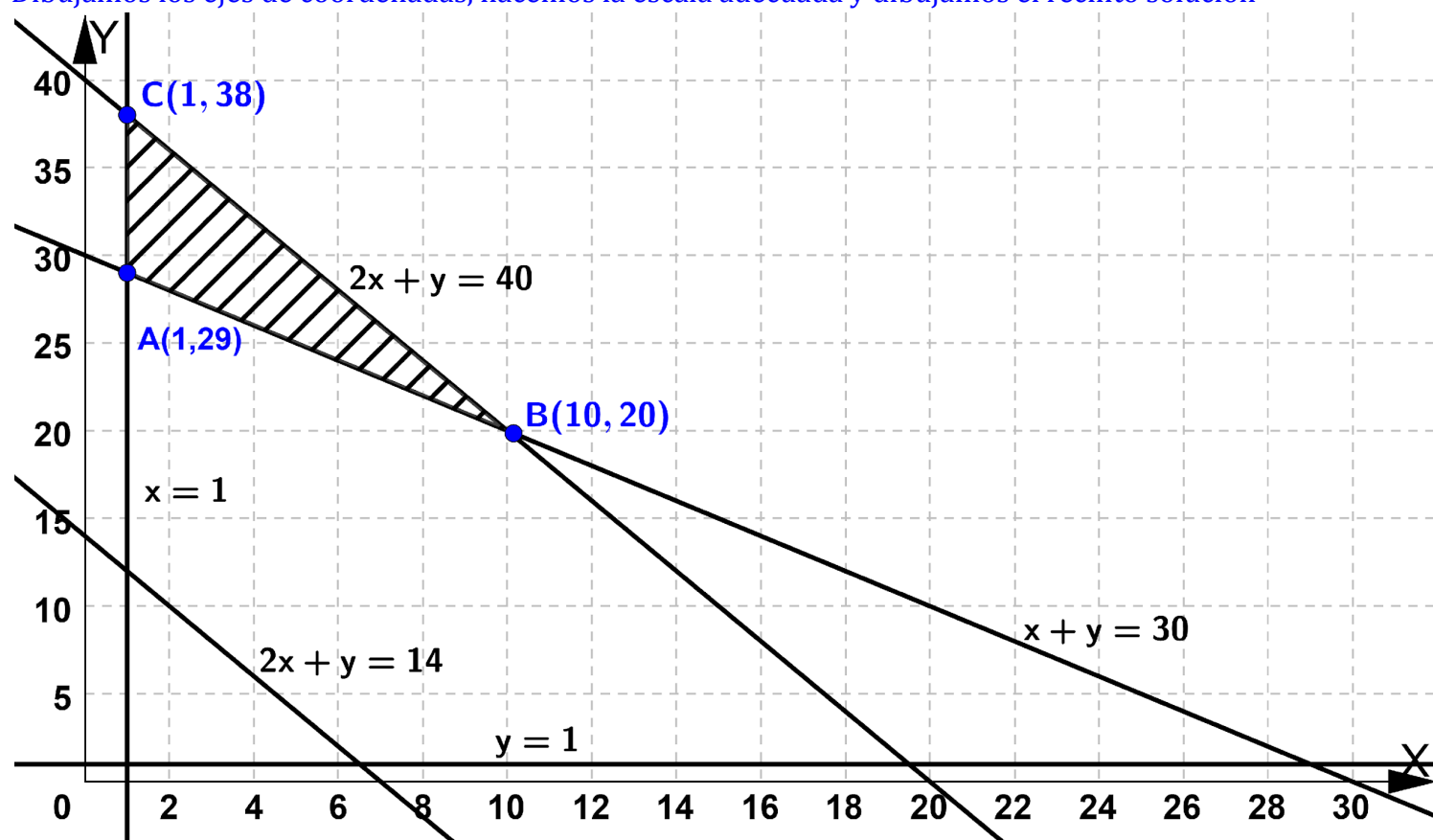
	nº de discos	nº de ordenadores	almacenamiento (en Tb)	coste (en €)
discos duros SATA	x	100x	9,6x	200x
discos duros SSD	y	50y	1,2y	100y
total	x + y	100x + 50y	9,6x + 1,2y	200x + 100y

Las restricciones son

$$\{x + y \geq 30 \quad x \geq 1 \quad y \geq 1 \quad 100x + 50y \geq 700 \rightarrow 2x + y \geq 14 \quad 200x + 100y \leq 4000 \rightarrow 2x + y \leq 40\}$$

La función a optimizar (maximizar) es la capacidad: $f(x, y) = 9,6x + 1,2y$

Dibujamos los ejes de coordenadas, hacemos la escala adecuada y dibujamos el recinto solución



Veamos en qué vértice, $A(1, 29)$, $B(10, 20)$ ó $C(1, 38)$, alcanza el máximo $f(x, y) = 9,6x + 1,2y$:

$$f(A) = f(1, 29) = 9,6 \cdot 1 + 1,2 \cdot 29 = 44,4 \quad f(B) = f(10, 20) = 9,6 \cdot 10 + 1,2 \cdot 20 = 120$$

$$f(C) = f(1, 38) = 9,6 \cdot 1 + 1,2 \cdot 38 = 55,2$$

El almacenamiento máximo es 120 Tb y se consigue instalando 10 discos SATA y 20 discos SSD

Nos piden también hallar la capacidad media, que es $\frac{120}{700} = \frac{6}{35} \cong 0,17143$ Tb

4B. Los huéspedes de un hotel pueden elegir entre: Solo Alojamiento (SA), Alojamiento y Desayuno (AD), y Todo Incluido (TI). Se sabe que el número de clientes en Todo Incluido es el doble que en Solo Alojamiento y que, por cada tres clientes en Solo Alojamiento, hay dos en Alojamiento y Desayuno. Además, si se marcharan 39 clientes de Todo Incluido, la suma de los que están en los otros dos regímenes sería igual a los que quedan en Todo Incluido.

- a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1,5 puntos)
b) ¿Cuántos clientes hay en cada régimen de alojamiento? (1 punto)

Resolución

Sean x , y , z el nº de clientes que eligen SA, AD y TI, respectivamente.

Usando el enunciado llegamos al sistema

$$\begin{cases} z = 2x \\ 3y = 2x \\ z - 39 = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = 2x \\ 2x - 39 = x + y \end{cases} \rightarrow x = y + 39$$

Sustituyendo en la 1ª ecuación, $3y = 2(y + 39) \Rightarrow y = 78$; $x = 78 + 39 = 117$; $z = 2 \cdot 117 = 234$.

Luego, hay 117 clientes en SA, 78 en AD y 234 en TI