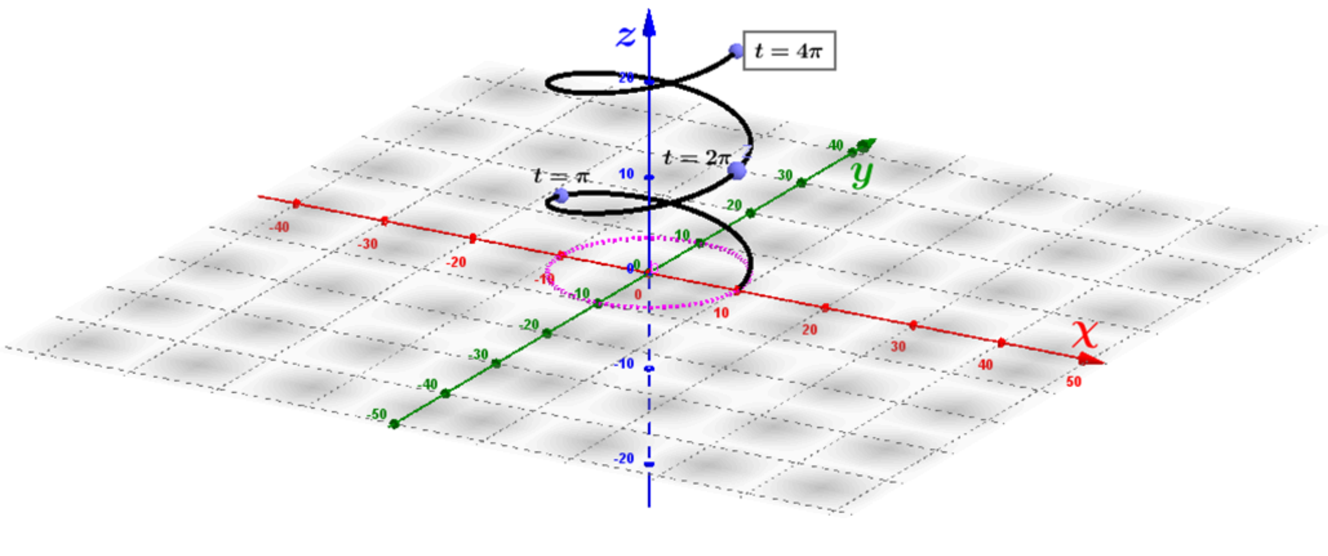
ΔΕΡΒΈΝΙ 2024-25

Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου, περιπτώσεις, εφαρμογές

Σαράμπαλης Κωνσταντίνος



Κίνηση Φορτισμένου Σωματιδίου Εντός Ομογενούς Μαγνητικού Πεδίου

Το πρόβλημα: Να μελετηθεί η κίνηση φορτισμένου σωματιδίου $(m,\, q)$ το οποίο βάλλεται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$, εντός απεριόριστου ομογενούς (και σταθερού χρονικά) μαγνητικού πεδίου, που σχηματίζει γωνία θ με την έντασή του $\vec{B}$ (Σχήμα 1).

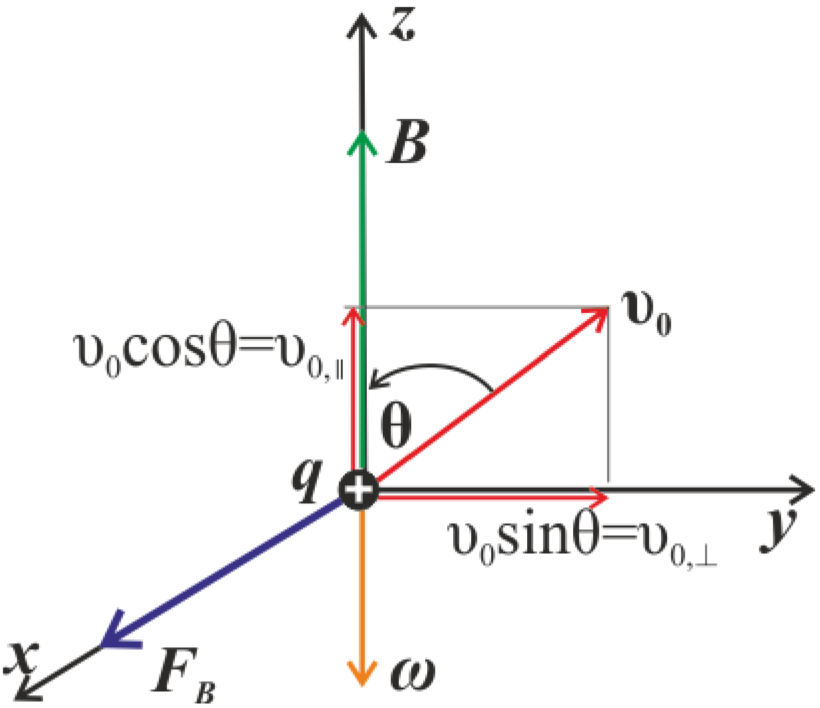
Η θεωρία

Η ασκούμενη στο σωματίδιο μαγνητική δύναμη, σε κάθε σημείο της τροχιάς του και ανεξαρτήτως της μορφής του μαγνητικού πεδίου, είναι πάντοτε κάθετη στην ταχύτητα και δίνεται από τη σχέση (θεωρούμε θετικό φορτίο, χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα):

$$\vec{F}_B = q\vec{\upsilon}\times\vec{B} = q\vec{\upsilon}_\perp\times\vec{B} = q\vec{\upsilon}\times\vec{B}_\perp \quad (\text{Νόμος Lorentz})$$

$$0 \le \theta = \angle\left(\vec{\upsilon}\to\vec{B}\right) \le \pi,\quad \left(\vec{\upsilon},\, \vec{B},\, \vec{F}\right) \to \left\{\begin{array}{c}\text{δεξιόστροφη τριάδα διανυσμάτων}\\ \text{δάκτυλα δεξιού χεριού}\end{array}\right\}$$

$$\left|\vec{F}_B\right| = |q|\left|\vec{\upsilon}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta = |q|\left|\vec{\upsilon}_\perp\right|\left|\vec{B}\right| = |q|\left|\vec{\upsilon}\right|\left|\vec{B}_\perp\right|,\quad \left(\vec{F}_B \text{ και } \vec{a}\right)\perp \vec{\upsilon} \text{ και } \vec{B}$$



Σχήμα 1: Το επίπεδο yz είναι αυτό που ορίζεται από την ταχύτητα και τη διεύθυνση του σταθερού και ομογενούς μαγνητικού πεδίου το οποίο εκτείνεται στη διεύθυνση του άξονα z. Η δύναμη κάθετη αρχικά στο προηγούμενο επίπεδο κατά τη διεύθυνση του άξονα x

Από την εξίσωση κίνησης (2^o νόμο) του φορτισμένου σωματιδίου παίρνουμε:

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B} = q\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \to \left\{ \begin{matrix} F_x = ma_x = q\left(\upsilon_y B_z - \upsilon_z B_y\right) \\ F_y = ma_y = q\left(\upsilon_z B_x - \upsilon_x B_z\right) \\ F_z = ma_z = q\left(\upsilon_x B_y - \upsilon_y B_x\right) \end{matrix} \right\} \to \left\{ \begin{matrix} a_x = \frac{q}{m}\left(\upsilon_y B_z - \upsilon_z B_y\right) \\ a_y = \frac{q}{m}\left(\upsilon_z B_x - \upsilon_x B_z\right) \\ a_z = \frac{q}{m}\left(\upsilon_x B_y - \upsilon_y B_x\right) \end{matrix} \right\}$$

Αν το μαγνητικό πεδίο έχει τη διεύθυνση του άξονα z, τότε $B_x = B_y = 0,\ \vec{B}_z = \vec{B}$ (Σχήμα 1) και οι προηγούμενες εξισώσεις απλοποιούνται ως εξής:

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{d\upsilon_x}{dt} = \left(\frac{qB}{m}\right)\upsilon_y \\ \frac{d\upsilon_y}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)\upsilon_x \alpha\nu \\ \frac{d\upsilon_z}{dt} = \theta\tau\alpha\theta\upsilon_z = \end{matrix} \right\} \to \quad \omega \equiv \frac{q}{m}B \ \left\{ \begin{matrix} a_x = \omega\upsilon_y \\ a_y = -\omega\upsilon_x \\ a_z = 0 \end{matrix} \right\} \quad \frac{q}{m} \equiv \left(\begin{matrix} \text{ειδικό φορτίο} \\ \text{σωματιδίου} \end{matrix} \right)$$ [1]

Η Απλή Περίπτωση Της Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

Αν η αρχική ταχύτητα δεν έχει συνιστώσα κατά τον άξονα z (διεύθυνση του $\vec{B}$), δηλ. το σωματίδιο βάλλεται με **ταχύτητα κάθετη προς τη διεύθυνση των μαγνητικών γραμμών** του ομογενούς πεδίου ($\vec{\upsilon}_0 \perp \vec{B}\ \left(\theta = 90^0\right) \to \upsilon_{0,z} = 0 \to \vec{\upsilon}_0 \in yy' \perp xx'$), αλλά και δεν αποκτά, αφού η αναπτυσσόμενη επιταχύνουσα μαγνητική δύναμη $\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$, ως δρώσα διαρκώς κάθετα προς την ταχύτητα, δεν έχει συνιστώσα στον άξονα z. Εφόσον η αρχική ταχύτητα είναι επί του επιπέδου xy, όπως και η δύναμη, τότε και η κίνηση θα εξελιχθεί (περιορίζεται) επί του ίδιου επιπέδου xy. Τα δεδομένα (α) η δύναμη δρα διαρκώς κάθετα προς την ταχύτητα $\left(\vec{F}_B \text{και}\ \vec{a} \perp \vec{\upsilon}\right)$ συνεπάγεται ότι μεταβάλλει τη διεύθυνσή της, αλλά αφήνει αναλλοίωτο το μέτρο και (β) η σταθερότητα του μέτρου της $\left|\vec{F}_B\right| = \left|q\vec{\upsilon}\right|\left|\vec{B}\right| = \text{σταθ.}$ (όπως και της επιτάχυνσης) παραπέμπουν στη **συνθήκη της ομαλής κυκλικής κίνησης** με τη δύναμη να παίζει το ρόλο

[1] Το ω έχει διαστάσεις γωνιακής ταχύτητας:

της κεντρομόλου, όπως και η αντίστοιχη επιτάχυνση είναι κεντρομόλος – ακτινική (παραλείπουμε για λόγους ευκολίας το δείκτη στην ταχύτητα).

Άρα: με $\vec{\upsilon} \perp \vec{B} \rightarrow \left(\vec{F}_B \, \text{σταθ.}\right) \perp \vec{\upsilon} \rightarrow |\vec{\upsilon}| = \text{σταθ.}\ |\vec{F}_B|\ |\vec{a}| =$ η κίνηση θα είναι **ομαλή κυκλική**.

Τα χαρακτηριστικά της διαγραφόμενης ομαλής κυκλικής κίνησης του σωματιδίου υπολογίζονται ως εξής (από τη θεωρία της ΟΚΚ στη Φυσική):

- ✔ Επιτάχυνση (κεντρομόλος ή ακτινική ή κάθετη, συμβολικά $\vec{a}_{rad}$ ή $\vec{a}_{\mathrm{N}}$) και ακτίνα (καμπυλότητας ή) κύκλου

$$\vec{F}_B = m\vec{a} \rightarrow q\upsilon B = m a_{rad} = m\frac{\upsilon^2}{R} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{rad} = \left(\dfrac{q}{m}B\right)\upsilon = \omega\upsilon \\ R = \dfrac{m\upsilon}{qB} = \dfrac{p}{qB} = \dfrac{\upsilon}{(q/m)B} = \dfrac{\upsilon}{\omega} \end{array}\right\},\ \left\{\begin{array}{l} \omega \equiv \dfrac{q}{m}B \\ \dfrac{q}{m} = \left(\begin{array}{c}\text{ειδικό φορτίο} \\ \text{σωματιδίου}\end{array}\right) \end{array}\right\}$$

- ✔ περίοδος περιστροφής $T = \dfrac{2\pi R}{\upsilon} = \dfrac{2\pi m}{qB} = \dfrac{2\pi}{(q/m)B} = \dfrac{2\pi}{\omega}$

- ✔ γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2\pi m/qB} = \left(\dfrac{q}{m}\right)B\ (\text{συχνότητα κυκλότρου})$

- ✔ $$\left\{\begin{array}{l} \vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dfrac{d\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)}{dt} = \vec{a}_\gamma \times \vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{\upsilon} = \vec{\omega}\times\vec{\upsilon} \rightarrow \vec{a} = \vec{\omega}\times\vec{\upsilon}\ \left(\uparrow\downarrow \vec{r}\right),\ \left(\begin{array}{l}\vec{a}_\gamma = 0\ \text{για ομαλή κυκλική κίνηση} \\ \vec{r} = \text{επιβατική ακτίνα}\end{array}\right) \\ \vec{F}_B = m\vec{a} = m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon} = q\vec{\upsilon}\times\vec{B} \rightarrow \vec{\omega}\times\vec{\upsilon} = \dfrac{q}{m}\vec{\upsilon}\times\vec{B} = -\dfrac{q}{m}\vec{B}\times\vec{\upsilon} \rightarrow \vec{\omega} = -\left(\dfrac{q}{m}\right)\vec{B} \end{array}\right\}$$
[2]

Αν το θετικό σωματίδιο βληθεί στο σημείο $(0,\ 0)$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ στην κατεύθυνση $+y$ εντός του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ κατεύθυνσης στην $+z$ (Σχήμα 1), τότε η δύναμη δείχνει στην κατεύθυνση $+x$. Η κυκλική κίνηση περιορίζεται στο επίπεδο xy και το σωματίδιο περιστρέφεται δεξιόστροφα $\vec{\omega}\otimes$ με $x > 0$ (μισό ημικύκλιο δεξιά του ημιάξονα $+x$ ($y > 0$) και μισό αριστερά του $y < 0$), ενώ το κέντρο του διαγραφόμενου κύκλου βρίσκεται πάνω στον ημιάξονα $+x$ και σε απόσταση R (ακτίνα του κύκλου) από την αρχή Ο των αξόνων (σημείο βολής).

Συμπεράσματα

[2] το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου ως προς το κέντρο του κύκλου με

1. Η τελευταία σχέση δηλοί το αντίθετο των κατευθύνσεων γωνιακής ταχύτητας και έντασης του μαγνητικού πεδίου αν το φορτίο είναι θετικό $\left[q>0\rightarrow\left(\vec{\omega},\,\vec{B}\right)=\square\ \otimes\quad \otimes\square\right]$ και το ίδιο αν είναι αρνητικό $\left[q<0\rightarrow\left(\vec{\omega},\,\vec{B}\right)=\square\ \square\quad \otimes\otimes\right]$.

2. Η ακτίνα R είναι ανάλογη της ταχύτητας και αντιστρόφως ανάλογη των (α) του χαρακτηριστικού q/m (ειδικό φορτίο) του σωματιδίου και (β) της έντασης του μαγνητικού πεδίου.

3. Η περίοδος και η γωνιακή ταχύτητα είναι ανεξάρτητες της ταχύτητας και της ακτίνας και εξαρτώνται από το q/m (ανάλογη ή αντιστρόφως ανάλογη αντιστοίχως) και το μέτρο της έντασης (αντιστρόφως ανάλογη ή ανάλογη αντιστοίχως).

   Τα προηγούμενα πρακτικά σημαίνουν ότι

4. Το ίδιο σωματίδιο (μάζα, φορτίο) με διπλάσια ταχύτητα στο ίδιο μαγνητικό πεδίο διαγράφει κύκλο διπλάσιας ακτίνας, αλλά με τις ίδιες γωνιακή ταχύτητα και περίοδο, ενώ με την ίδια ταχύτητα σε μαγνητικό πεδίο διπλάσιας έντασης διαγράφει κύκλο με την ακτίνα να μειώνεται στο μισό, όπως και η περίοδος, ενώ η γωνιακή ταχύτητα διπλασιάζεται.

5. Από δύο διαφορετικά σωματίδια που εισέρχονται με την ίδια ταχύτητα στο ίδιο μαγνητικό πεδίο αυτό με το μεγαλύτερο q/m διαγράφει κύκλο μικρότερης ακτίνας και περιόδου και μεγαλύτερης γωνιακής ταχύτητας.

6. Προφανώς αν το μαγνητικό πεδίο δεν είναι ομογενές η τροχιά δεν είναι κυκλική.

Παραμετρικές Εξισώσεις Κυκλικής Τροχιάς

Ως γνωστόν (από μαθηματικά) οι παραμετρικές εξισώσεις κύκλου ακτίνας $r=\upsilon/\omega$ ($\vec{\upsilon}\ \square\ yy'$ η αρχική ταχύτητα) και κέντρου την αρχή των αξόνων είναι (το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ του σημείου $(x,\,y)$ του κύκλου περιστρέφεται αριστερόστροφα περί την αρχή του με σταθερό ρυθμό (σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω) σχηματίζοντας γωνία $\theta=\omega t$ με τον ημιάξονα των $+x$ είναι (Σχήμα 2, αριστερά):

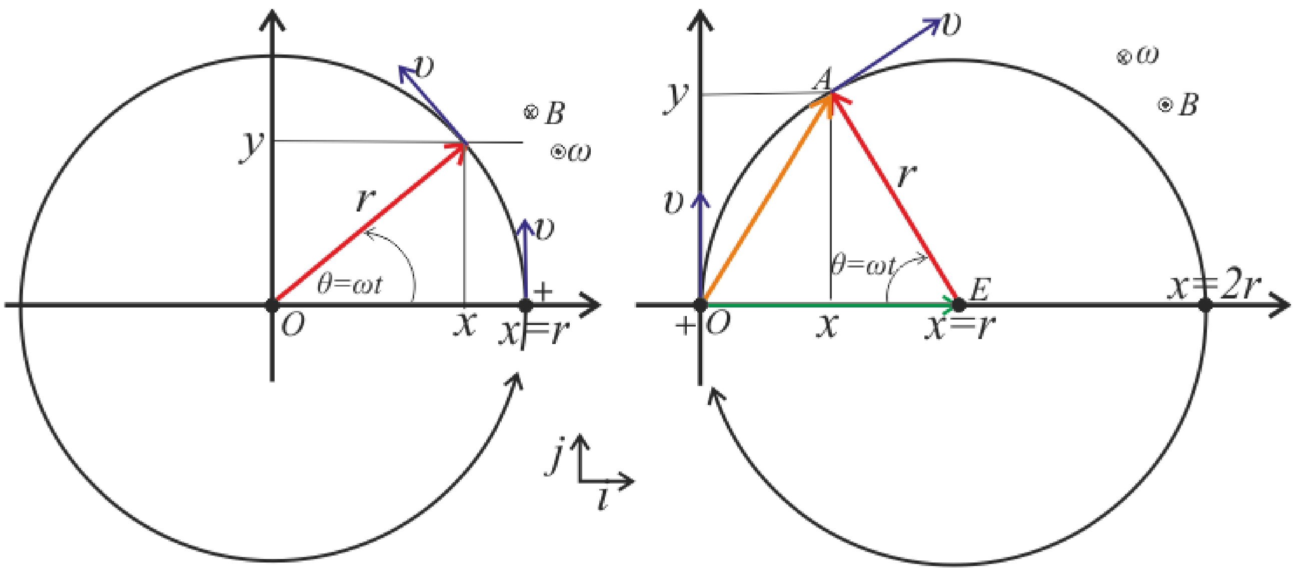
$$x^2+y^2=r^2\rightarrow\vec{r}=\left(r\cos\omega t\right)\vec{i}+\left(r\sin\omega t\right)\vec{j}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{\upsilon}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\left(-r\omega\sin\omega t\right)\vec{i}+\left(r\omega\cos\omega t\right)\vec{j}\\ \vec{a}=\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\left(-r\omega^2\cos\omega t\right)\vec{i}+\left(-r\omega^2\sin\omega t\right)\vec{j}\end{array}\right\}\rightarrow$$

$$\vec{a}=-\omega\upsilon_y\vec{i}+\omega\upsilon_x\vec{j}\rightarrow\begin{pmatrix}a_x=-\omega\upsilon_y\\ a_y=\omega\upsilon_x\end{pmatrix},\quad\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(-\omega\upsilon_y\right)^2+\left(\omega\upsilon_x\right)^2}=\omega\upsilon=\omega^2 r$$

Τροποποιούμε τις εξισώσεις έτσι ώστε να εκφράσουν την κυκλική τροχιά στην οποία το σωματίδιο αρχίζει την δεξιόστροφο κίνησή του από την αρχή των αξόνων με κέντρο τώρα το σημείο $(r,\ 0)$ και την επιβατική ακτίνα δεξιόστροφη (Σχήμα 2, δεξιά)

$$(x-r)^2+y^2=r^2 \rightarrow \vec{r}=(r-r\cos\omega t)\vec{i}+(r\sin\omega t)\vec{j} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{\upsilon}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=(r\omega\sin\omega t)\vec{i}+(r\omega\cos\omega t)\vec{j} \\ \vec{a}=\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}=(r\omega^2\cos\omega t)\vec{i}+(-r\omega^2\sin\omega t)\vec{j} \end{array}\right\}$$

$$\vec{a}=\omega\upsilon_y\vec{i}-\omega\upsilon_x\vec{j} \rightarrow \begin{pmatrix} a_x=\omega\upsilon_y \\ a_y=-\omega\upsilon_x \end{pmatrix}$$



Σχήμα 2: Ένα περιστρεφόμενο περί την αρχή του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα διάνυσμα αποδίδει την ομαλή κυκλική κίνηση (κάτοψη προηγούμενου σχήματος). Το δεξί σχήμα προσαρμοσμένο στα δεδομένα του προβλήματος. Σύμφωνα με αυτά το διάνυσμα $\vec{r}$ περιστρέφεται δεξιόστροφα και μετράμε τη γωνία περιστροφής $\theta=\omega t$ του διανύσματος από τον άξονα x λαμβάνοντας υπόψη ότι το κέντρο του κύκλου βρίσκεται σε απόσταση r από την αρχή πάνω στον άξονα x

Επιβεβαιώνουμε ότι η ταχύτητα έχει σταθερό μέτρο και ότι είναι εφαπτόμενη στην τροχιά, δηλ. κάθετη στο διάνυσμα της επιβατικής ακτίνας ($\overrightarrow{\mathrm{EA}}=(-r\cos\omega t)\vec{i}+(r\sin\omega t)\vec{j}$), όπως και στην επιτάχυνση (που έχει αντίθετη κατεύθυνση με το διάνυσμα της επιβατικής ακτίνας, δηλ. δείχνει προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, άρα είναι κεντρομόλος).

$$|\vec{\upsilon}|^2 = \vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon} = \left[(r\omega\sin\omega t)\vec{i} + (r\omega\cos\omega t)\vec{j}\right]^2 =$$

$$(r\omega\sin\omega t)^2 + (r\omega\cos\omega t)^2 = r^2\omega^2 = \sigma\tau\alpha\theta. \rightarrow |\vec{\upsilon}| = \omega r =$$

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{EA} = \left[(r\omega\sin\omega t)\vec{i} + (r\omega\cos\omega t)\vec{j}\right]\cdot\left[(-r\cos\omega t)\vec{i} + (r\sin\omega t)\vec{j}\right] =$$

$$= (r\omega\sin\omega t)(-r\cos\omega t) + (r\omega\cos\omega t)(r\sin\omega t) = 0 \rightarrow \vec{\upsilon} \perp \vec{EA}$$

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{a} = \left[(r\omega\sin\omega t)\vec{i} + (r\omega\cos\omega t)\vec{j}\right]\cdot\left[(r\omega^2\cos\omega t)\vec{i} + (-r\omega^2\sin\omega t)\vec{j}\right] =$$

$$= (r\omega\sin\omega t)\cdot(r\omega^2\cos\omega t) + (r\omega\cos\omega t)\cdot(-r\omega^2\sin\omega t) = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{\upsilon}$$

Διαφορικές Εξισώσεις Κίνησης

Από τις αρχικές διαφορικές εξισώσεις, επειδή η κάθε μια εμπεριέχει παραγώγους και των δύο μεταβλητών, λύνουμε ως προς τη μια και αντικαθιστούμε στην άλλη (κρατάμε το δείκτη της αρχικής ταχύτητας).

$$\begin{pmatrix} a_x = \omega\upsilon_y \rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} = \omega\dfrac{dy}{dt} \\ a_y = -\omega\upsilon_x \rightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\omega\dfrac{dx}{dt} \rightarrow \dfrac{d^3y}{dt^3} = -\omega\dfrac{d^2x}{dt^2} \end{pmatrix} \rightarrow \frac{d^3y}{dt^3} = -\omega^2\frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{d^3y}{dt^3} + \omega^2\frac{dy}{dt} = 0$$

Λύνουμε την τελευταία που είναι ομογενής τρίτης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική της εξίσωση και οι ρίζες της είναι $\rho^3 + \omega^2\rho = 0 \rightarrow \rho = 0, \pm\omega i$ (φανταστική μονάδα $i =$)

Άρα η γενική λύση θα είναι $y(t) = c_1 e^{\omega i} + c_2 e^{-\omega i} = \ldots = c_3\cos\omega t + c_4\sin\omega t$

Προσδιορίζουμε τις σταθερές βάσει των αρχικών συνθηκών.

$$y(0) = 0 \rightarrow c_3 = 0 \rightarrow y(t) = c_4\sin\omega t \rightarrow \frac{dy}{dt} = c_4\omega\cos\omega t$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = \upsilon_0 \rightarrow c_4\omega = \upsilon_0 \rightarrow c_4 = \frac{\upsilon_0}{\omega}$$

Άρα για τη μεταβλητή y ισχύουν

$$y(t) = \frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\omega t,\ \upsilon_y(t) = \upsilon_0\cos\omega t,\ a_y(t) = -\omega\upsilon_0\sin\omega t$$

Συνεχίζουμε με τη x. Λύνουμε τη διαφορική εξίσωση ολοκληρώνοντας (προσδιορίζουμε την ταχύτητα).

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\omega\frac{dy}{dt}\to\frac{d^2x}{dt^2}=\omega\upsilon_0\cos\omega t\to\frac{dx}{dt}=\upsilon_x=\int\omega\upsilon_0\cos\omega t\cdot dt+c_5=\upsilon_0\sin\omega t+c_5$$

Προσδιορίζουμε τη σταθερά της ταχύτητας βάσει των αρχικών συνθηκών

$$\upsilon_x(0)=0\to c_5=0\to\upsilon_x(t)=\upsilon_0\sin\omega t\to a_x(t)=\omega\upsilon_0\cos\omega t$$

Ξανά ολοκληρώνουμε για να προσδιορίσουμε τη x και προσδιορίζουμε τη σταθερά βάσει αρχικών συνθηκών

$$\frac{dx}{dt}=\upsilon_0\sin\omega t\to x(t)=\int\upsilon_0\sin\omega t\cdot dt+c_6=-\frac{\upsilon_0}{\omega}\cos\omega t+c_6$$
$$x(0)=0\to c_6=\frac{\upsilon_0}{\omega}\to x(t)=\frac{\upsilon_0}{\omega}-\frac{\upsilon_0}{\omega}\cos\omega t$$

Άρα:

$$x(t)=\frac{\upsilon_0}{\omega}-\frac{\upsilon_0}{\omega}\cos\omega t,\ \upsilon_x(t)=\upsilon_0\sin\omega t,\ a_x(t)=\omega\upsilon_0\cos\omega t$$

Συνοψίζοντας:

$$\boxed{x(t)=\frac{\upsilon_0}{\omega}(1-\cos\omega t)}\quad\boxed{\upsilon_x(t)=\upsilon_0\sin\omega t}\quad\boxed{a_x(t)=\omega\upsilon_0\cos\omega t}$$
$$\boxed{y(t)=\frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\omega t}\quad\boxed{\upsilon_y(t)=\upsilon_0\cos\omega t}\quad\boxed{a_y(t)=-\omega\upsilon_0\sin\omega t}$$
$$\boxed{z(t)=0}\quad\boxed{\upsilon_z(t)=0}\quad\boxed{a_z(t)=0}$$

$$a^2=a_x^2+a_y^2=(\omega\upsilon_0\cos\omega t)^2+(-\omega\upsilon_0\sin\omega t)^2\to|\vec{a}|=\omega\upsilon_0=\frac{qB}{m}\upsilon_0=$$

$$\overbrace{\left(x-\frac{\upsilon_0}{\omega}\right)^2+y^2=\left(-\frac{\upsilon_0}{\omega}\cos\omega t\right)^2+\left(\frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\omega t\right)^2=\left(\frac{\upsilon_0}{\omega}\right)^2}^{\text{κύκλος κέντρου }\left(\frac{\upsilon_0}{\omega},\ 0\right)\text{ και ακτίνας }R=\frac{\upsilon_0}{\omega}=\frac{m\upsilon_0}{qB}}$$

Γενικότερη Περίπτωση (Αρχή Ανεξαρτησίας Κινήσεων)

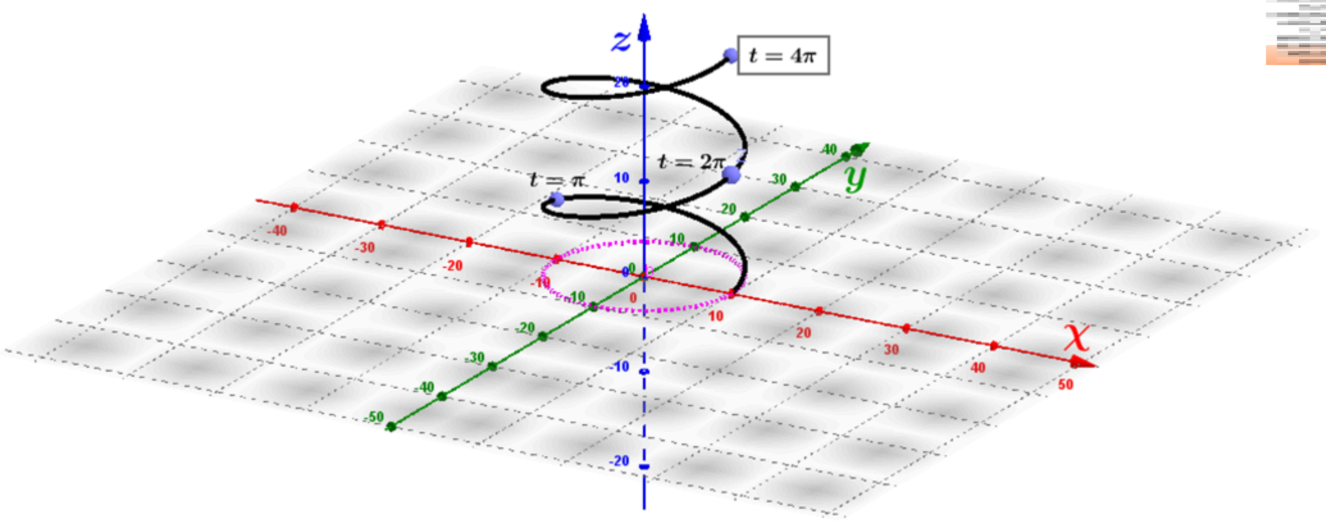
Το φορτίο q βάλλεται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (επί του επιπέδου yz, Σχήμα 1) που η κατεύθυνσή της σχηματίζει γωνία θ με την κατεύθυνση ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$.

Είναι δεδομένο ότι η δύναμη (ως εξωτερικό γινόμενο $\vec{F}_B = m\vec{a} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B} = q\vec{\upsilon}_\perp \times \vec{B}$) από το πεδίο στο φορτίο δρα διαρκώς κάθετα προς την ταχύτητά του και θα έχει ως συνέπεια να αλλάζει μόνο η διεύθυνσή της (εφαπτομενική στην τροχιά του) με το μέτρο της να παραμένει σταθερό και ότι στη διαμόρφωση του μέτρου της δύναμης (και της επιτάχυνσης) παίζει ρόλο μόνο η συνιστώσα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_\perp$ που είναι κάθετη προς το $\vec{B}$.

Βασιζόμενοι στην **αρχή της επαλληλίας των κινήσεων**, αναλύουμε την ταχύτητα σε παράλληλη και σε κάθετη συνιστώσα προς τη διεύθυνση του $\vec{B}$, $\vec{\upsilon}_0 = \vec{\upsilon}_{0,\parallel} + \vec{\upsilon}_{0,\perp}, \upsilon_{0,\parallel} = \upsilon_0 \cos\theta, \upsilon_{0,\perp} = \upsilon_0 \sin\theta$. Έτσι η κίνηση αναλύεται σε ομαλή κυκλική με ταχύτητα μέτρου $|\vec{\upsilon}_{0,\perp}| = \text{σταθ.}$ με το επίπεδό της κάθετο προς το $\vec{B}$ και σε ευθύγραμμη ομαλή με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{0,\parallel}$ ($\vec{F}_z = 0 \Rightarrow \vec{a}_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} \rightarrow \vec{\upsilon}_z = \vec{\upsilon}_{0,\parallel} = \text{σταθ.}$, όπως προκύπτει και από προηγούμενη σχέση) κατά τη διεύθυνση του $\vec{B}$. Μελετώντας κάθε κίνηση ξεχωριστά, συνθέτουμε τα αποτελέσματα για να προκύψει η συνολική κίνηση.

Συμπεράσματα

1. Η κίνηση είναι **ελικοειδής (σπειροειδής)**, διότι διαγράφοντας κυκλική τροχιά στο επίπεδο xy ταυτόχρονα μετατοπίζεται παράλληλα προς τη διεύθυνση του $\vec{B}$ (κατά τον άξονα z) με σταθερή ταχύτητα. Σύνθεση ομαλής κυκλικής και ευθύγραμμης ομαλής κάθετης στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς που όμως δεν ολοκληρώνεται (σε κάθε περίοδο το φορτίο έχει μετακινηθεί στην κατεύθυνση του άξονα $+z$).
2. Το σωματίδιο θα κινηθεί με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα εφαπτόμενη στην σπειροειδή τροχιά που με τη σειρά της θα εφάπτεται στη μαγνητική γραμμή που διέρχεται από το σημείο βολής (αν το φορτίο ήταν αρνητικό ισχύουν ακριβώς τα ίδια με τη διαφορά στην αλλαγή της φοράς της κίνησης, πχ. στο Σχήμα 1 από δεξιόστροφη σε αριστερόστροφη).
3. Σε κάθε σημείο της καμπυλόγραμμης κίνησης η ταχύτητα έχει το ίδιο μέτρο, αλλάζοντας διαρκώς διεύθυνση που προέρχεται από την αλλαγή διεύθυνσης της $\vec{\upsilon}_\perp$, αφού η $\vec{\upsilon}_\parallel$ παραμένει σταθερή (και πάντοτε κάθετη στην $\vec{\upsilon}_\perp$).



Σχήμα 3: Η ελικοειδής καμπύλη με άξονα τον z. Για εποπτικούς λόγους η παράλληλη συνιστώσα της ταχύτητας έχει παρθεί πολύ μικρότερη της κάθετης. Ο ροζ κύκλος είναι η προβολή της καμπύλης στο επίπεδο xy

4. Το κέντρο της ανολοκλήρωτης κυκλικής τροχιάς κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{0,\parallel}$ κατά μήκος μιας μαγνητικής γραμμής που απέχει όσο και η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς από τη μαγνητική γραμμή που διέρχεται από το σημείο βολής.
5. Η τροχιά του φορτίου συναντά τις μαγνητικές γραμμές υπό την ίδια πάντοτε γωνία (η σταθερότητα των μέτρων των δύο συνιστωσών συνεπάγεται και το σταθερό της γωνίας που σχηματίζει η ταχύτητα με τη διεύθυνση της έντασης του μαγνητικού πεδίου).
6. Η ακτίνα της σπείρας (απόσταση τυχαίου σημείου τροχιάς από την κεντρική μαγνητική γραμμή) είναι η ίδια με την της κυκλικής τροχιάς με την υπεισερχόμενη ταχύτητα να είναι τώρα η $\vec{\upsilon}_{\perp}$ (κάθετη προς το $\vec{B}$ συνιστώσα της).
7. Ομοίως και η περίοδος (και η γωνιακή ταχύτητα), δηλ. ο χρόνος μέχρι το σωματίδιο να ξαναπεράσει από την ίδια μαγνητική γραμμή, θα είναι η ίδια με την της κυκλική τροχιάς που έτσι και αλλιώς δεν υπεισέρχεται η ταχύτητα. Έτσι τα δύο μεγέθη δίνονται από τις προηγούμενες σχέσεις που αναφέρονται σε καθαρή κυκλική τροχιά.
8. Η μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του πεδίου (ευθύγραμμη ομαλή) υπολογίζεται με την ταχύτητα που εκτελείται, που είναι η $\vec{\upsilon}_{0,\parallel}$ παράλληλη προς τη διεύθυνση του πεδίου συνιστώσα της ταχύτητας. Η $\vec{\upsilon}_{0,\parallel}$ του σωματιδίου παραμένει σταθερή, σε όλα τα σημεία της τροχιάς, περιστρεφόμενη ομαλά με τη γωνιακή ταχύτητα, ενώ η $\vec{\upsilon}_{\perp} \in xy$ αλλάζει διαρκώς μόνο διεύθυνση (ασύμβατα κάθετη στην διεύθυνση του πεδίου) και το άθροισμά τους δίνει την ταχύτητα με μέτρο όσο και η αρχική ταχύτητα.

Έτσι έχουμε:

$$R=\frac{m\upsilon_{0,\perp}}{qB}=\frac{\upsilon_0\sin\theta}{(q/m)B}=\frac{\upsilon_{0,\perp}}{\omega},\ T=\frac{2\pi}{(q/m)B}=\frac{2\pi}{\omega},\ \omega=(q/m)B$$

$$\text{βήμα έλικας}=\text{απόσταση σπειρών}=\upsilon_{0,\parallel}T=\upsilon_0\cos\theta\,\frac{2\pi}{(q/m)B}=\upsilon_0\cos\theta\,\frac{2\pi}{\omega}$$

Αν στην περίπτωση της ελικοειδούς κίνησης ενισχύσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου (ή το σωματίδιο στην πορεία του συναντήσει ισχυρότερο μαγνητικό πεδίο), τότε, όπως φαίνεται από τις προηγούμενες σχέσεις, η κίνηση θα γίνει πιο σφικτή, δηλ. μικραίνει το μέγεθος (ακτίνα) των σπειρών και ενώ η ταχύτητα κατά τη διεύθυνση του πεδίου δεν επηρεάζεται η μετατόπιση όμως στην ίδια διεύθυνση στη διάρκεια μιας περιόδου γίνεται μικρότερη (μικραίνει η περίοδος) με αποτέλεσμα οι σπείρες να πλησιάζουν μεταξύ τους (πυκνότερες, μείωση βήματος έλικας).

Διαφορικές Εξισώσεις Κίνησης

Στις προηγούμενες γενικές σχέσεις από την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων θέτουμε ως $\upsilon_y=\upsilon_{0,\perp\vec{B}}=\upsilon_0\sin\theta$ και ως $\upsilon_z=\upsilon_{0,\parallel\vec{B}}=\upsilon_0\cos\theta$. Η 1η συνιστώσα επηρεάζεται ως προς τη διεύθυνσή της, ενώ η δεύτερη συνιστώσα δεν επηρεάζεται καθόλου, αφού η δύναμη δρά κάθετα στην ταχύτητα.

$$\vec{F}_B=q\vec{\upsilon}\times\vec{B}=q\left(\vec{\upsilon}_\perp+\vec{\upsilon}_\parallel\right)\times\vec{B}=q\vec{\upsilon}_\perp\times\vec{B}+q\vec{\upsilon}_\parallel\times\vec{B}=q\vec{\upsilon}_\perp\times\vec{B}$$

Παραμετρικές εξισώσεις κυκλικής έλικας $\left(\upsilon_{0,\perp}=\upsilon_0\sin\theta,\ \upsilon_{0,\parallel}=\upsilon_0\cos\theta,\ \omega=\frac{q}{m}B\right)$

$x(t)=\frac{\upsilon_{0,\perp}}{\omega}(1-\cos\omega t)$	$\upsilon_x(t)=\upsilon_{0,\perp}\sin\omega t$	$a_x(t)=\omega\upsilon_{0,\perp}\cos\omega t$
$y(t)=\frac{\upsilon_{0,\perp}}{\omega}\sin\omega t$	$\upsilon_y(t)=\upsilon_{0,\perp}\cos\omega t$	$a_y(t)=-\omega\upsilon_{0,\perp}\sin\omega t$
$z(t)=\upsilon_{0,\parallel}t$	$\upsilon_z(t)=\upsilon_{0,\parallel}$	$a_z(t)=0$

$$\left|\vec{\upsilon}(t)\right|^2=\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2=(\upsilon_{0,\perp}\sin\omega t)^2+(\upsilon_{0,\perp}\cos\omega t)^2+\upsilon_{0,\parallel}^2=\upsilon_{0,\perp}^2+\upsilon_{0,\parallel}^2=\upsilon_0^2\rightarrow\left|\vec{\upsilon}(t)\right|=\upsilon_0=$$

$$a^2=a_x^2+a_y^2=(\omega\upsilon_{0,\perp}\cos\omega t)^2+(-\omega\upsilon_{0,\perp}\sin\omega t)^2\rightarrow\left|\vec{a}\right|=\omega\upsilon_{0,\perp}=\left(\frac{q}{m}B\right)\upsilon_{0,\perp}=$$

$$\vec{a}=(\omega\upsilon_{0,\perp}\cos\omega t)\vec{i}+(-\omega\upsilon_{0,\perp}\sin\omega t)\vec{j}=\omega\upsilon_{0,\perp}\left[(\cos\omega t)\vec{i}-(\sin\omega t)\vec{j}\right]\parallel xy$$

Η περίοδος της κίνησης θα είναι: $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{q}{m}B}=\frac{2\pi m}{qB}$.

Η **ακτίνα καμπυλότητας** (προσοχή: όχι του κύκλου που θα διέγραφε αν δεν υπήρχε η παράλληλη συνιστώσα)[3]:

$$\rho = \frac{|\vec{\upsilon}|^3}{|\vec{\upsilon}\times\vec{a}|},\quad |\vec{\upsilon}\times\vec{a}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \upsilon_{0,\perp}\sin\omega t & \upsilon_{0,\perp}\cos\omega t & \upsilon_{0,\parallel} \\ \omega\upsilon_{0,\perp}\cos\omega t & -\omega\upsilon_{0,\perp}\sin\omega t & 0 \end{vmatrix} = \ldots = \omega\upsilon_{0,\perp}\upsilon_0 \rightarrow$$

$$\rho = \frac{\upsilon_0^3}{\omega\upsilon_{0,\perp}\upsilon_0} = \frac{\upsilon_0^2}{\omega\upsilon_{0,\perp}} = \frac{\upsilon_0^2}{\omega\upsilon_0\sin\theta} = \frac{\upsilon_0}{\omega\sin\theta} = \text{σταθ.},\ R = \frac{\upsilon_{0,\perp}}{\omega},\ \frac{\rho}{R} = \left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{0,\perp}}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta} > 1,\ 0<\theta\le 90^0$$

$$R = \rho\sin^2\theta \le \rho,\ \rho = \frac{\upsilon_0^2}{\omega\upsilon_{0,\perp}},\ R = \frac{\upsilon_{0,\perp}}{\omega}$$

Ή

$$\vec{r}(t) = \left[\frac{\upsilon_{0,\perp}}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]\vec{i} + \left(\frac{\upsilon_{0,\perp}}{\omega}\sin\omega t\right)\vec{j} + \left(\upsilon_{0,\parallel}t\right)\vec{k}$$

$$\vec{\upsilon}(t) = \left(\upsilon_{0,\perp}\sin\omega t\right)\vec{i} + \left(\upsilon_{0,\perp}\cos\omega t\right)\vec{j} + \upsilon_{0,\parallel}\vec{k}$$

$$\vec{T} \equiv \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\upsilon_{0,\perp}}{\upsilon_0}(\sin\omega t)\vec{i} + \frac{\upsilon_{0,\perp}}{\upsilon_0}(\cos\omega t)\vec{j} + \frac{\upsilon_{0,\parallel}}{\upsilon_0}\vec{k}\ (\text{μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα})$$

$$\kappa \equiv \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{|d\vec{T}/dt|}{ds/dt} = \frac{\dfrac{\left|(\omega\upsilon_{0,\perp}\cos\omega t)\vec{i} - (\omega\upsilon_{0,\perp}\sin\omega t)\vec{j}\right|}{\upsilon_0}}{\upsilon_0} = \frac{\omega\upsilon_{0,\perp}}{\upsilon_0^2}\ (\text{καμπυλότητα})$$

$$\rho \equiv \frac{1}{\kappa} = \frac{\upsilon_0^2}{\omega\upsilon_{0,\perp}} = \frac{\upsilon_0^2}{\omega\upsilon_0\sin\theta} = \frac{\upsilon_0}{\omega\sin\theta}\ (\text{ακτίνα καμπυλότητας})$$

$$a_{\tan} \equiv \frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt} = 0\ (|\vec{\upsilon}| = \upsilon_0),\ a_{rad} \equiv \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{\upsilon_0^2}{\dfrac{\upsilon_0}{\omega\sin\theta}} = \upsilon_0\omega\sin\theta = \upsilon_{0,\perp}\omega$$

$(\vec{a}_{\tan} = \vec{a}_T)$ = εφαπτομενική ή επιτρόχιος συνιστώσα

$(\vec{a}_{rad} = \vec{a}_N)$ = ακτινική ή κάθετη ή κεντρομόλος συνιστώσα

$$\vec{N} = \frac{\dfrac{d\vec{T}}{ds}}{\left|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right|} = (\cos\omega t)\vec{i} - (\sin\omega t)\vec{j}\ (\text{κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα})$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{rad} = |\vec{a}_{rad}|\vec{N} = \upsilon_{0,\perp}\omega\left[(\cos\omega t)\vec{i} - (\sin\omega t)\vec{j}\right]$$

Παρατήρηση: Η ακτίνα καμπυλότητας είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου που θα διέγραφε αν δεν υπήρχε συνιστώσα της ταχύτητας παράλληλης προς τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Η

[3] Βλέπε ανάρτηση διαφορικής γεωμετρίας

επιτάχυνση είναι εξ ολοκλήρου κάθετη και οριζόντια, παράλληλη δηλ. προς το επίπεδο (x, y) και δείχνει προς τον άξονα της ελικοειδούς καμπύλης.

Μήκος καμπύλης σε χρόνο t:

$$s(t) = \int_0^t |\vec{\upsilon}| dt = \int_0^t \upsilon_0 dt = \upsilon_0 t$$

Μελέτη Κίνησης Φορτίου Εντός Περιορισμένου Μαγνητικού Πεδίου

Έστω (Σχήμα 4) φορτισμένο σωματίδιο φορτίου q (ας το θεωρήσουμε θετικό, χωρίς να καταστρέφεται η γενικότητα) και μάζας m που βάλλεται την $t = 0$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ στο σημείο Α ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $\vec{B}$ κάθετα προς τις μαγνητικές γραμμές. Αν το πεδίο είναι απεριόριστο ολοκληρώνει την κυκλική του τροχιά (το επίπεδό της κάθετο προς τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου), άλλως σε κάποιο σημείο η τροχιά του συναντά το όριο του πεδίου και εξέρχεται από αυτό κατά την εφαπτομένη της κυκλικής τροχιάς στο σημείο εξόδου. Ας θεωρήσουμε το σημείο βολής Α ως αρχή συστήματος συντεταγμένων στο οποίο ο θετικός ημιάξονας των x σχηματίζει γωνία φ (**γωνία βολής**) με την κατεύθυνση της ταχύτητας, με $0 < \varphi < \pi$ και ότι κατ' αρχήν το μαγνητικό πεδίο εκτείνεται απεριόριστα πάνω από τον άξονα των x. Από το σχήμα προκύπτουν τα επόμενα (αναμενόμενα συμπεράσματα).

Διερεύνηση, εφαρμογές

1. Οι συντεταγμένες του κέντρου Ο της κυκλικής τροχιάς θα είναι

$$O(x,\ y) = (R\sin\varphi,\ -R\cos\varphi),\ 0<\varphi<\pi,\ R = \frac{m\upsilon}{qB} = \frac{\upsilon}{\omega},\ \omega = \frac{q}{m}B$$

Η θέση του Ο εξαρτάται από τη γωνία βολής φ. Για παραπληρωματικές γωνίες φ οι τετμημένες $\sin\varphi$ του Ο είναι ίσες, $\left[\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi)\right]$, ενώ οι τεταγμένες $-\cos\varphi$ είναι αντίθετες, $\left[\cos\varphi = -\cos(\pi - \varphi)\right]$. Για $\varphi < \pi/2 \rightarrow -\cos\varphi < 0$ η τεταγμένη είναι αρνητική, δηλ. το κέντρο Ο κάτω από τον άξονα των x και για την παραπληρωματική της είναι θετική, δηλ. πάνω. Στην $1^η$ περίπτωση το διαγραφόμενο τόξο είναι μικρότερο του ημικυκλίου και στη $2^η$ μεγαλύτερο.

2. Οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου Μ της τροχιάς που αντιστοιχεί στο διαγραφόμενο τόξο ΑΜ (σε κάθε περίπτωση η μεσοκάθετος μιας χορδής που ενώνει δύο θέσεις του σωματιδίου, πάνω στον διαγραφόμενο κύκλο, διέρχεται από το κέντρο του κύκλου Ο) και σε περιστροφή της επιβατικής ακτίνας

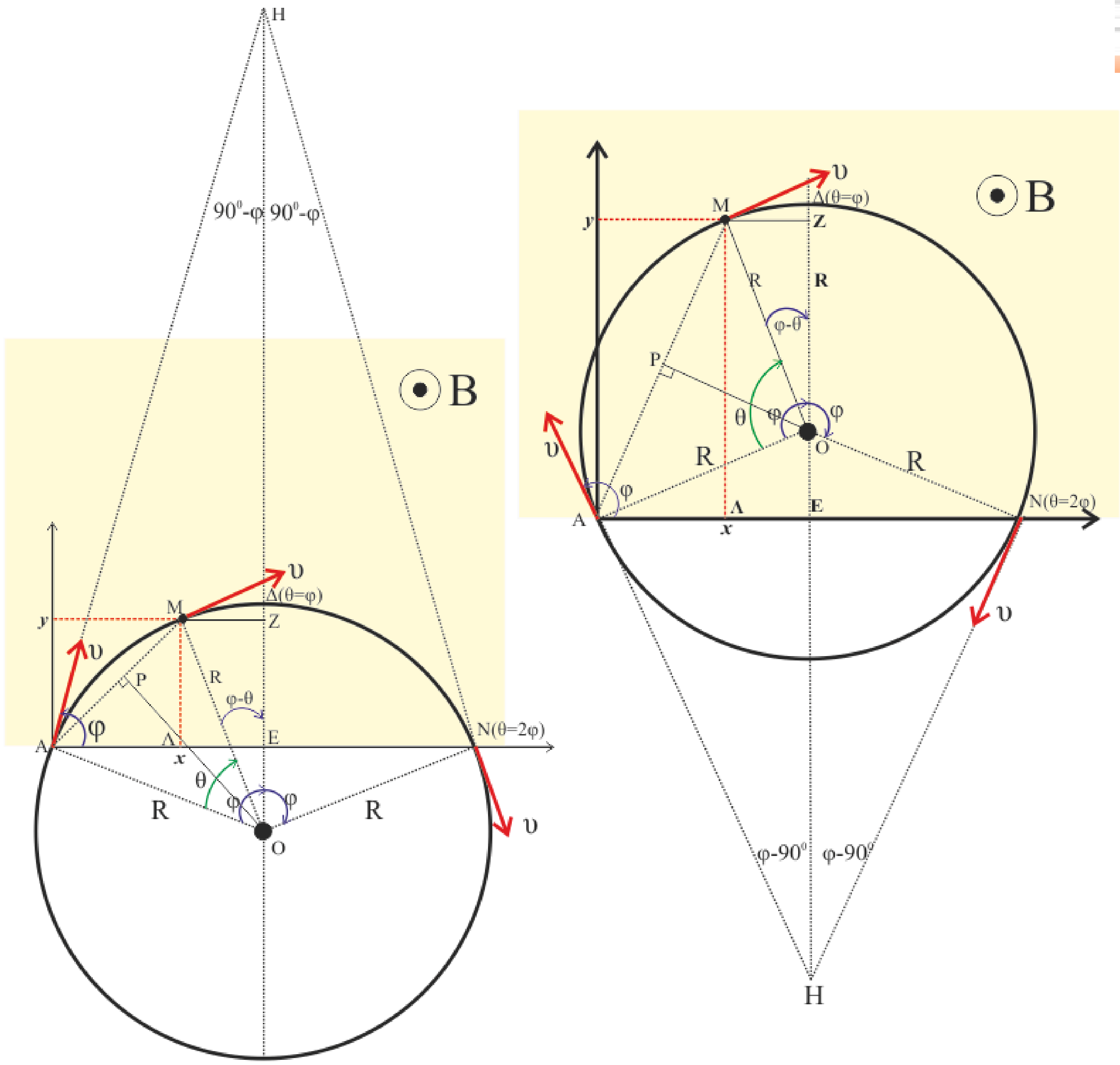
(και της ταχύτητας) κατά γωνία $\theta = \omega t$ (**επίκεντρη**) θα είναι

$$\begin{pmatrix} x_M = \mathrm{A\Lambda} = \mathrm{AE} - \mathrm{\Lambda E} = R\left[\sin\varphi - \sin\left(\varphi - \theta\right)\right] \\ y_M = \mathrm{M\Lambda} = \mathrm{ZE} = \mathrm{ZO} - \mathrm{EO} = R\left[\cos\left(\varphi - \theta\right) - \cos\varphi\right] \end{pmatrix},\ 0 \le \theta \le 2\varphi \to$$

$$M\left(x,\, y\right) \to \left[\overbrace{R\left[\sin\varphi - \sin\left(\varphi - \theta\right)\right]}^{x=x(\theta)},\ \overbrace{R\left[-\cos\varphi + \cos\left(\varphi - \theta\right)\right]}^{y=y(\theta)}\right],\ \cos\left(\varphi - \theta\right) = \cos\left(\theta - \varphi\right)$$

Η μεταβλητή γωνία θ (**γωνία εκτροπής** της επιβατικής ακτίνας ή της ταχύτητας του σωματιδίου, ως προς τις αρχικές κατευθύνσεις τους) αν το πεδίο είναι περιορισμένο και το σωματίδιο εξέλθει του μαγνητικού πεδίου, τότε περιορίζεται ως προς τη μέγιστη τιμή της (2π αν ολοκληρωθεί η κυκλική τροχιά) και εξισώνεται με τη φ (γωνία βολής) όταν το σωματίδιο περνά από το σημείο Δ και είναι διπλάσιά της όταν διέρχεται από Ν ($\theta_{\max} = 2\varphi,\ \forall\varphi$). Πριν το Δ ήταν μικρότερή της και μετά μεγαλύτερή της.

Από την $\mathrm{OE} = -R\cos\varphi$ προκύπτει ότι καθώς η φ μεγαλώνει και το συνημίτονο μικραίνει το ΟΕ συρρικνώνεται και η τεταγμένη του Ε από αρνητική (κάτω από τον άξονα των x) για $\varphi < \pi/2$, μηδενίζεται για $\varphi = \pi/2$ (κάθετη είσοδος και το Ε πάνω στον άξονα των x συμπίπτει με το Ο) και καθίσταται θετική για $\varphi > \pi/2$ (το Ο πάνω από τον άξονα των x). Αυτό σημαίνει ότι για $\varphi < \pi/2$ το κέντρο του κύκλου είναι κάτω από τον άξονα των x και το μεγαλύτερο μέρος του είναι επίσης κάτω από τον άξονα, ενώ για $\varphi > \pi/2$ το κέντρο είναι πάνω από τον άξονα και το μεγαλύτερο μέρος του πάνω από αυτόν. Για $\varphi = \pi/2$ το Ο είναι πάνω στον άξονα και ο κύκλος διαμοιράζεται εξίσου πάνω και κάτω από τον άξονα.



Σχήμα 4: Με τον άξονα των x να σχηματίζει γωνία φ με τη διεύθυνση της ταχύτητας το κέντρο O της τροχιάς βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x αν $\varphi < \pi/2$, πάνω από τον άξονα αν $\varphi > \pi/2$ και πάνω στον άξονα αν $\varphi = \pi/2$. Σε κάθε περίπτωση η επιλογή των αξόνων για ευκολότερη μελέτη είναι θέμα προσωπικής εκτίμησης και των δεδομένων του συγκεκριμένου προβλήματος

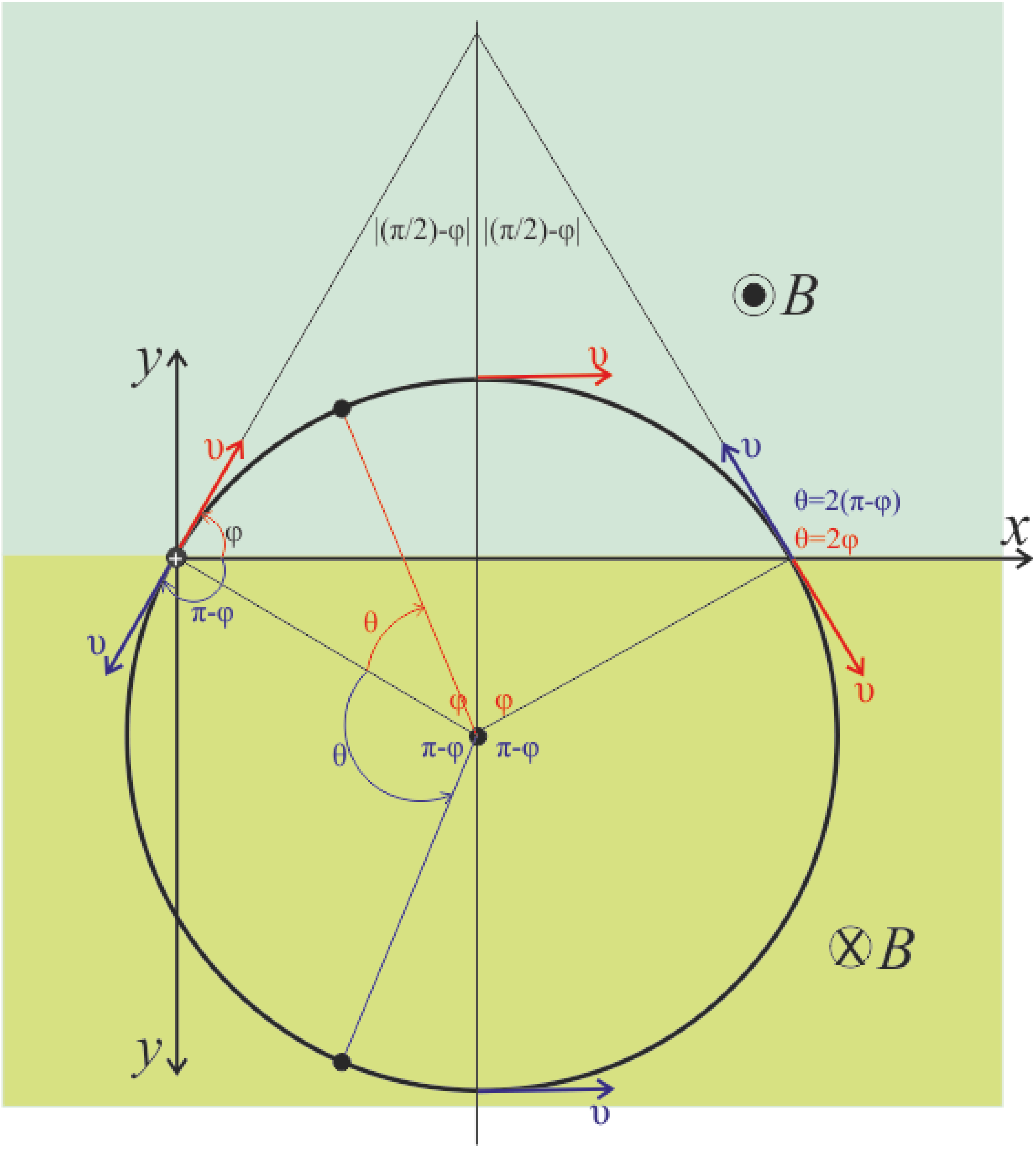
3. Η y συντεταγμένη του M **μεγιστοποιείται**, όταν

$$\frac{dy_M}{d\theta} = \left[-\cos\varphi + \cos\left(\varphi-\theta\right)\right]_\theta' = 0 \rightarrow 0 - \sin\left(\varphi-\theta\right)\cdot\left(-1\right) = 0 \rightarrow \sin\left(\theta-\varphi\right) = 0 \rightarrow \theta = \varphi$$

δηλ. όταν η επιβατική ακτίνα θα έχει περιστραφεί όσο είναι και η γωνία βολής φ. Τότε:

$$y_{\max} = R\left[-\cos\varphi + \cos\left(\theta - \varphi\right)\right] = R\left(-\cos\varphi + \cos 0^{0}\right) = R\left(1 - \cos\varphi\right) \rightarrow \begin{cases} \text{αν } \varphi < \pi/2 \rightarrow \cos\varphi > 0 \rightarrow y_{\max} < R \\ \varphi = \pi \quad \rightarrow \quad \varphi = \quad \rightarrow y_{\max} = R \\ \text{αν } \varphi > \pi/2 \rightarrow \cos\varphi < 0 \rightarrow y_{\max} > R \end{cases}$$

$$x\left(y_{\max}\right) = R\left[\sin\varphi - \sin\left(\varphi - \theta\right)\right] = R\sin\varphi \leq R,\ \forall\varphi \in \left(0,\ \pi\right)$$



Σχήμα 5: Οι δύο περιπτώσεις στο ίδιο σχήμα

4. Η y συντεταγμένη του Μ μηδενίζεται (σημείο εξόδου από το μαγνητικό πεδίο), όταν

$$y_{M} = 0 \rightarrow R\left[-\cos\varphi + \cos\left(\varphi - \theta\right)\right] = 0 \xrightarrow{\theta > \varphi} \cos\left(\theta - \varphi\right) = \cos\varphi \rightarrow \theta - \varphi = \varphi \rightarrow \theta = 2\varphi$$

Τότε: $x_{M}\left(y_{M} = 0\right) = x_{M,\max} \rightarrow R\left[\sin\varphi - \sin\left(\varphi - \theta\right)\right] = R\left[\sin\varphi + \sin\varphi\right] = 2R\sin\varphi$

5. Εφαρμογές (αναμενόμενα αποτελέσματα από τη γεωμετρία του σχήματος

1. Αν $\varphi = \pi / 6$, τότε οι συντεταγμένες του Ο θα είναι

$$O(x,\ y) = (R\sin\varphi,\ \text{-}R\cos\varphi) = \left(R\sin\frac{\pi}{6},\ \text{-}R\cos\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}R,\ \text{-}\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$$

δηλ. κάτω από τον άξονα x και σε απόσταση $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ από αυτόν. Η τεταγμένη y του Μ μηδενίζεται όταν

$$y_M(\varphi) = 0 \to \theta = 2\varphi = 2\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

δηλ η επιβατική ακτίνα έχει περιστραφεί κατά 60^0 και η τετμημένη του Μ θα είναι τότε

$$y = 0 \to x_M = 2R\sin\varphi = 2R\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = R \, .$$

2. Αν $\varphi = \pi / 3$, τότε οι συντεταγμένες του Ο θα είναι

$$O(x,\ y) = (R\sin\varphi,\ \text{-}R\cos\varphi) = \left(R\sin\frac{\pi}{3},\ \text{-}R\cos\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R,\ \text{-}\frac{1}{2}R\right)$$

δηλ. κάτω από τον άξονα x και σε απόσταση $\frac{1}{2}R$ από αυτόν. Η τεταγμένη y του Μ μηδενίζεται όταν

$$y_M(\varphi) = 0 \to \theta = 2\varphi = 2\frac{\pi}{3}$$

Δηλ. η επιβατική ακτίνα έχει περιστραφεί κατά 120^0 και η τετμημένη του Μ θα είναι τότε

$$y = 0 \to x_M = 2R\sin\varphi = 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2R\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} \, .$$

3. Αν $\varphi = \pi / 2$, τότε οι συντεταγμένες του Ο θα είναι

$$O(x,\ y) = (R\sin\varphi,\ \text{-}R\cos\varphi) = \left(R\sin\frac{\pi}{2},\ \text{-}R\cos\frac{\pi}{2}\right) = (R,\ 0)$$

δηλ. πάνω στον άξονα x και σε απόσταση R από την αρχή A.

Η τεταγμένη του M μηδενίζεται (βλέπε προηγούμενη σχέση για M) όταν

$$y_M(\varphi) = 0 \to \theta = 2\varphi = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

δηλ. η επιβατική ακτίνα έχει περιστραφεί κατά 180^0 και η τετμημένη του M θα είναι τότε

$$y = 0 \to x_M = 2R\sin\varphi = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2R$$

.

4. Αν $\varphi = 5\pi/6$, τότε οι συντεταγμένες του O θα είναι

$$O(x,\ y) = (R\sin\varphi,\ \text{-}R\cos\varphi) = \left(R\sin\frac{5\pi}{6},\ \text{-}R\cos\frac{5\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}R,\ R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

δηλ. πάνω από τον άξονα x και σε απόσταση $R\frac{\sqrt{3}}{2}$ από αυτόν. Η τεταγμένη y του M μηδενίζεται όταν

$$y_M(\varphi) = 0 \to \theta = 2\varphi = 2\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

δηλ η επιβατική ακτίνα έχει περιστραφεί κατά 300^0 και η τετμημένη του M θα είναι τότε

$$y = 0 \to x_M = 2R\sin\varphi = 2R\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = R$$

6. Τη χρονική στιγμή t το σωματίδιο (σημείο M) θα έχει περιστραφεί κατά γωνία $\theta = \omega t = \frac{2\pi}{T}t$ και θα έχει διαγράψει τόξο μήκους $s = \theta R = \omega t R = \upsilon t$. Τη στιγμή της μεγιστοποίησης της y ($\theta = \varphi$) θα είναι $t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{2\pi}T \to \left\{t\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{12}T,\ t\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{12}T,\ t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{12}T,\ t\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{12}T\right\}$ και θα έχει διαγράψει τόξο μήκους $s = \varphi R$. Ο χρόνος κίνησης μέσα στο πεδίο θα είναι διπλάσιος των προηγούμενων χρόνων.

7. Αν το μαγνητικό πεδίο έχει όριο πχ προς τα πάνω από μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των x που απέχει απ' αυτόν απόσταση $d < y_\Delta$, τότε για να βρούμε τη θ (γωνία περιστροφής – εκτροπής), μέχρι το σωματίδιο να εξέλθει από το μαγνητικό πεδίο λύνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση

$$y = d \to R\cos(\varphi - \theta) - R\cos\varphi = d \to \cos(\varphi - \theta) = \frac{d}{R} + \cos\varphi$$

Γνωστής πλέον της θ προσδιορίζουμε το x από την $x = R\sin\varphi - R\sin(\varphi - \theta)$. Για παράδειγμα αν $\varphi = \pi/3,\ d = R/4$ βρίσκουμε

$$\cos(\varphi - \theta) = \frac{d}{R} + \cos\varphi \to \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = 0,25 + \cos\frac{\pi}{3} = 0,75 = \cos 41,4^0 = \cos(0,23\pi)\,rad$$

$$\frac{\pi}{3} - \theta = \pm 0,23\pi \to \theta = 0,33\pi \mp 0,23\pi = 0,10\pi,\ 0,56\pi = 18^0,\ 100,8^0$$

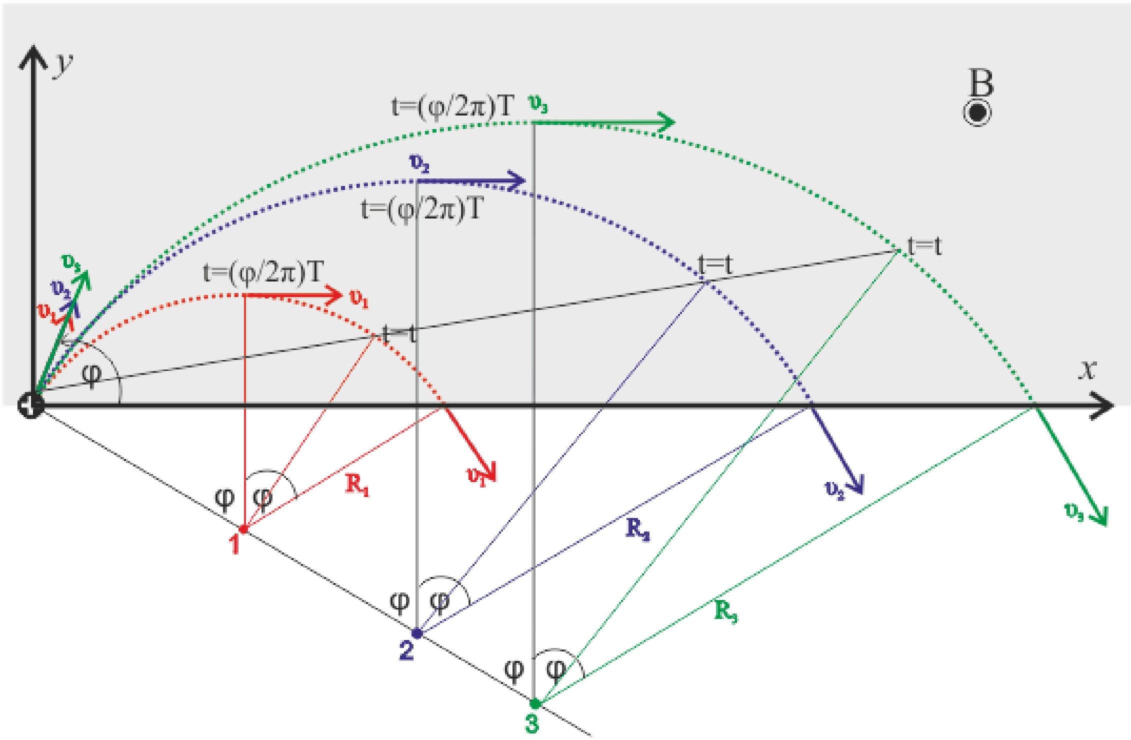
με αποδεκτή μόνο την πρώτη (από εκεί θα εξέλθει). Η τετμημένη του σημείου εξόδου θα είναι $x = R\sin 0,33\pi - R\sin 0,23\pi = (0,86 - 0,66)R = 0,20R$. Αν το σύνορο του μαγνητικού πεδίου ήταν κάτω από τον άξονα των x δουλεύουμε αναλόγως. Σε κάθε περίπτωση (και στα επόμενα) η ταχύτητα θα είναι κάθετη στην κάθε φορά επιβατική ακτίνα και προφανώς και σε αυτή που αντιστοιχεί στο σημείο εξόδου από το μαγνητικό πεδίο.

8. Αν το σύνορο του πεδίου είναι ευθεία κάθετη στον άξονα των x και σε γνωστή απόσταση $x = d < x_{\max} = 2R\sin\varphi$, τότε με την $x = R\sin\varphi - R\sin(\varphi - \theta) = d \to \sin(\varphi - \theta) = \sin\varphi - \frac{d}{R}$ προσδιορίζουμε τη θ και το y εξόδου από την $y = -R\cos\varphi + R\cos(\varphi - \theta)$. Για παράδειγμα αν $\varphi = \pi/3,\ d = R/2$ βρίσκουμε

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 0,37 = \sin 21,7^0 \to 60^0 - \theta = \pm 21,7^0$$

$$\theta = 60^0 \mp 21,7^0 = 38,3^0 \ \acute{\eta}\ 81,7^0$$

με αποδεκτή την 1η εφόσον $d = 0,5R < R\sin\frac{\pi}{3} = R\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,87R$.



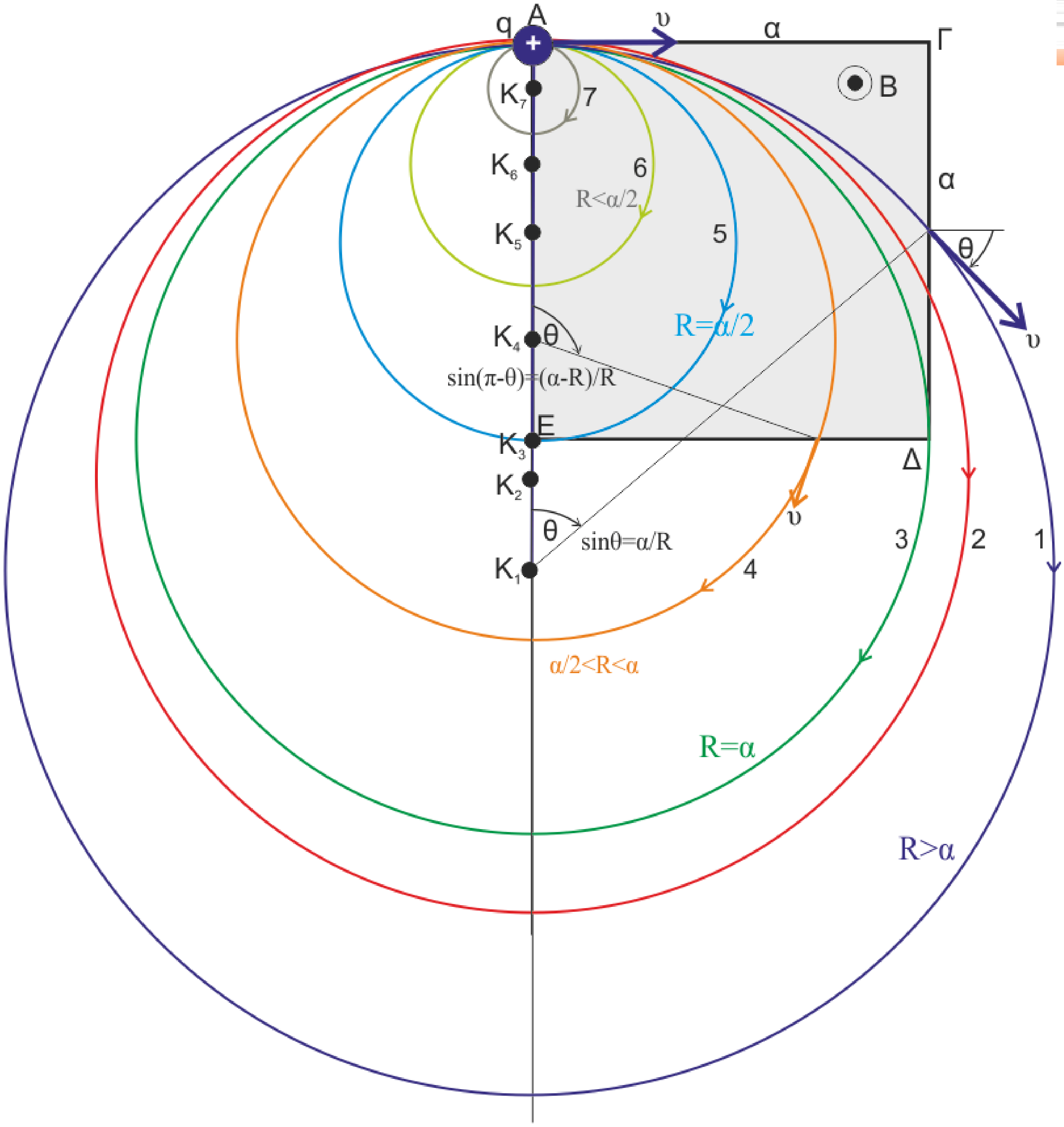
Σχήμα 6: Στο σχήμα το ίδιο σωματίδιο βάλλεται εντός του ίδιου ομογενούς μαγνητικού πεδίου, άρα και της ίδιας περιόδου, υπό γωνία φ ως προς τον άξονα των x με ταχύτητες διαφορετικών μέτρων. Η ακτίνα της τροχιάς είναι ανάλογη του μέτρου της ταχύτητας. Περιορίζοντας ή διευρύνοντας τις διαστάσεις του μαγνητικού πεδίου, οριζόντια ή κατακόρυφα προβλέπουμε το σημείο εξόδου του σωματιδίου απ' αυτό.

Σε Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο Τετραγωνικής Διατομής

Πρόβλημα: Κινούμενο φορτισμένο σωματίδιο $(q,\ m)$ εισέρχεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου τετραγωνικής κάθετης διατομής με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ κατά μήκος της μιας πλευράς της διατομής. Από πού θα εξέλθει το σωματίδιο (Σχήμα 7);

Με δεδομένο ότι το κέντρο της κυκλικής τροχιάς βρίσκεται κατά μήκος της αριστερής πλευράς $\mathrm{AE} \perp \vec{\upsilon}$ του τετραγώνου, εσωτερικά ή στην προέκτασή της, η έξοδος από το πεδίο μπορεί να γίνει σε κάποιο από τα σημεία των πλευρών του τετραγώνου εξαιρουμένης της πλευράς εισόδου ΑΓ (της παράλληλης προς την ταχύτητα εισόδου). Από τη σχέση $R = \dfrac{1}{(q/m)B}\upsilon = \dfrac{\upsilon}{\omega} = \sigma\tau\alpha\theta \cdot \upsilon$ συνάγεται ότι η ακτίνα της τροχιάς, για δεδομένο σωματίδιο και μαγνητικό πεδίο, είναι ανάλογη της ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι μεγαλύτερες ταχύτητες συνεπάγονται μεγαλύτερες ακτίνες που μπορεί να μην ξεπερνούν, να είναι ίσες ή και να ξεπερνούν σε μήκος την πλευρά α του τετραγώνου, δηλ. το κέντρο της τροχιάς να βρίσκεται πάνω ή και κάτω από το Ε ή και στο ίδιο το Ε. Η εκτροπή από την αρχική διεύθυνση κίνησης μέχρι τη διεύθυνση κίνησης κατά την έξοδο από το πεδίο θα είναι μικρότερη για μεγαλύτερες ταχύτητες,

όπως και ο χρόνος κίνησης εντός του πεδίο (η περίοδος είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας ($T=\frac{2\pi m}{qB}$). Το μήκος τόξου για το πέρασμα από το μαγνητικό πεδίο είναι αυτό που αντιστοιχεί στη γωνία εκτροπής θ μέχρι την έξοδο από το πεδίο. Συνεπώς στις μεγάλες ταχύτητες που αντιστοιχούν σε μεγάλες ακτίνες με $R>a\rightarrow\upsilon>\omega a$ η έξοδος γίνεται από τη δεξιά πλευρά ΔΓ του τετραγώνου με μικρές εκτροπές ($0<\theta<90^\circ$), ενώ στις μικρές ταχύτητες που αντιστοιχούν σε μικρές ακτίνες με $\frac{a}{2}<R<a\rightarrow\frac{1}{2}\omega a<\upsilon<\omega a$ η έξοδος γίνεται από την κάτω πλευρά ΔΕ με μεγάλες εκτροπές ($90^\circ<\theta<180^\circ$). Για μια συγκεκριμένη ταχύτητα $R=a\rightarrow\upsilon=\omega a$ η έξοδος γίνεται από την κορυφή Δ με εκτροπή ακριβώς $\theta=90^\circ$. Για πολύ μικρές ταχύτητες με $2R<a\rightarrow R<\frac{1}{2}a\rightarrow\upsilon<\frac{1}{2}\omega a$ η εκτροπή θ γίνεται ακριβώς 180° και διαγράφοντας ημικύκλιο εξέρχεται σε μισή περίοδο από την πλευρά εισόδου ΑΕ.



Σχήμα 7: Φορτισμένο σωματίδιο βάλλεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου τετραγωνικής διατομής, όπως στο σχήμα. Το ερώτημα είναι από ποια πλευρά του τετραγώνου θα εξέλθει το σωματίδιο. Το σχήμα δείχνει αριθμημένες τις κυκλικές τροχιές όμοιων σωματιδίων διαφόρων ταχυτήτων αν κινούνταν εντός απεριόριστου μαγνητικού πεδίου και τα αντίστοιχα κέντρα τους. Αν το πεδίο περιορίζεται στο τετράγωνο, τότε τα τμήματα των κύκλων εκτός του τετραγώνου δεν υφίστανται

Συνοψίζοντας (κριτήρια):

$R = \frac{\upsilon}{\omega}$, $\omega = \frac{q}{m}B$, Κ κέντρο κυκλικής τροχιάς στην ευθεία ΑΕ, $a =$ πλευρά τετραγωνικής διατομής ΜΠ

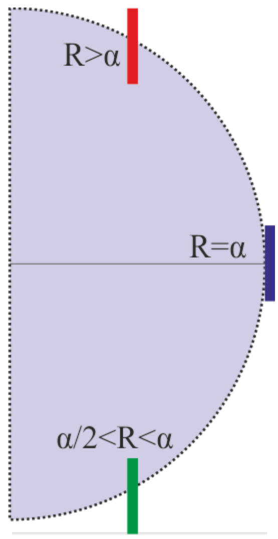
$$R < \frac{1}{2}a \rightarrow \upsilon < \frac{1}{2}\omega a \rightarrow \theta = 180^0,\ t = \frac{T}{2}, \text{ έξοδος από την ΑΕ, Κ στο πάνω μισό της ΑΕ (τροχιές 6, 7)}$$

$$R = \frac{1}{2}a \rightarrow \upsilon = \frac{1}{2}\omega a \rightarrow \theta = 180^0,\ t = \frac{T}{2} \rightarrow \text{ έξοδος στο Ε, Κ το κέντρο της πλευράς ΑΕ (τροχιά 5)}$$

$$\frac{1}{2}a < R < a \rightarrow \frac{1}{2}\omega a < \upsilon < \omega a \rightarrow 180^0 > \theta > 90^0,\ \frac{T}{2} > t > \frac{T}{4} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(\pi - \theta) = \frac{a - R}{R} \\ \cos\theta = 1 - \frac{\omega a}{\upsilon} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{έξοδος από την ΕΔ} \\ \text{Κ} \in \text{κάτω μισό της ΑΕ} \\ \text{(τροχιά 4)} \end{array} \right\}$$

$$R = a \rightarrow \upsilon = \omega a \rightarrow \theta = 90^0,\ t = \frac{T}{4} \rightarrow \text{ έξοδος στο Δ, Κ} \equiv \text{Ε (τροχιά 3)}$$

$$R > a \rightarrow \upsilon > \omega a \rightarrow 90^0 > \theta > 0^0,\ t < \frac{T}{4},\ \sin\theta = \frac{a}{R} = \frac{\omega a}{\upsilon} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{έξοδος από την ΔΓ} \\ \text{Κ} \in \text{στην προέκταση της ΑΕ} \\ \text{(τροχιές 1, 2)} \end{array} \right\}$$



Με απλές σκέψεις (Σχήμα 8), χωρίς σχέσεις και υπολογισμούς, μπορούμε να ανιχνεύσουμε (προβλέψουμε) νοερά από ποια πλευρά του τετραγώνου θα εξέλθει το σωματίδιο. Έτσι με την υπόθεση ότι το πεδίο ήταν απεριόριστο δεξιά της ΑΕ και με δεδομένα (1) αν η τροχιά ήταν πλήρες ημικύκλιο η έξοδος θα γινόταν σε σημείο της ημιευθείας ΑΕ με ταχύτητα αντίθετης κατεύθυνσης (η επιβατική ακτίνα στην έξοδο, κάθετη στην ταχύτητα, ευθυγραμμισμένη με την ακτίνα στην είσοδο, άρα το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το σημείο εισόδου με αυτό της εξόδου αποτελεί διάμετρο) (2) η μέγιστη απόσταση από την ΑΕ, που θα ήταν ίση με την ακτίνα, περιορίζεται ενδεχομένως (αν είναι μεγαλύτερη) από την πλευρά της τετραγωνικής διατομής και να εξέρχεται προτού ολοκληρώσει τεταρτοκύκλιο ή ημικύκλιο (3) η θέση του κέντρου του διαγραφόμενου ημικυκλίου είναι επί της ημιευθείας ΑΕ και απέναντι (κάθετα στην ΑΕ) σε απόσταση ίση με την ακτίνα θα ήταν το σημείο της τροχιάς του τεταρτοκυκλίου με τη μέγιστη απόσταση απ' αυτή, συγκρίνουμε την ακτίνα με την πλευρά του τετραγώνου: (α) αν η ακτίνα είναι μεγαλύτερη από την πλευρά του τετραγώνου το κέντρο του κύκλου είναι κάτω από το Ε, η τροχιά συναντά την πλευρά ΓΔ προτού διαγράψει τεταρτοκύκλιο και εξέρχεται απ' αυτή (β) αν είναι ίσες, τότε το κέντρο είναι το Ε, διαγράφει ακριβώς τεταρτοκύκλιο και εξέρχεται από το σημείο Δ (γ) αν είναι μικρότερη, αλλά όχι μικρότερη από το μισό της πλευράς του τετραγώνου (το κέντρο πάνω από το Ε), τότε η τροχιά, μεγαλύτερη από τεταρτοκύκλιο, αλλά μικρότερη από ημικύκλιο, συναντά την ΕΔ και η έξοδος γίνεται από αυτή (δ) αν είναι ίση με το μισό, το κέντρο κύκλου συμπίπτει με το κέντρο της πλευράς ΑΕ, τότε εξέρχεται ακριβώς από το Ε, αφού διαγράψει ημικύκλιο και τέλος (ε) αν είναι μικρότερη από το μισό της πλευράς, τότε εξέρχεται από την ΑΕ, αφού διαγράψει ημικύκλιο.

Σε κάθε περίπτωση το σημείο εξόδου από το περιορισμένο μαγνητικό πεδίο εξαρτάται από τις διαστάσεις του πεδίου, την ταχύτητα του φορτισμένου σωματιδίου, τα χαρακτηριστικά του σωματιδίου (ειδικό του φορτίο=φορτίο προς μάζα) και από τη γωνία βολής. Το πρόβλημα είναι περισσότερο γεωμετρικό παρά φυσικής.

Σε Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο Κυκλικής Διατομής

Πρόβλημα: Φορτισμένο σωματίδιο χαρακτηριστικών $(q,\ m)$ κινούμενο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ εισέρχεται εντός ομογενούς κυλινδρικού μαγνητικού πεδίου κάθετα προς τις μαγνητικές γραμμές. Αν η διεύθυνση της ταχύτητας κατά την είσοδό του στο πεδίο συμπίπτει με μια ακτίνα r μιας κάθετης κυκλικής τομής του πεδίου να μελετηθεί η κίνησή του, (Σχήμα 9).

Το σωματίδιο εισερχόμενο στο Α, διέρχεται από το μαγνητικό πεδίο εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση και διαγράφοντας τμήμα της κυκλικής τροχιάς εξέρχεται από το Γ με την ταχύτητα να έχει αλλάξει διεύθυνση, αλλά όχι μέτρο.

Η ακτίνα της τροχιάς και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής δίνονται αντιστοίχως από τις σχέσεις:

$$R = \frac{m\upsilon}{qB} = \frac{\upsilon}{\omega},\ \ \omega = \frac{q}{m}B$$

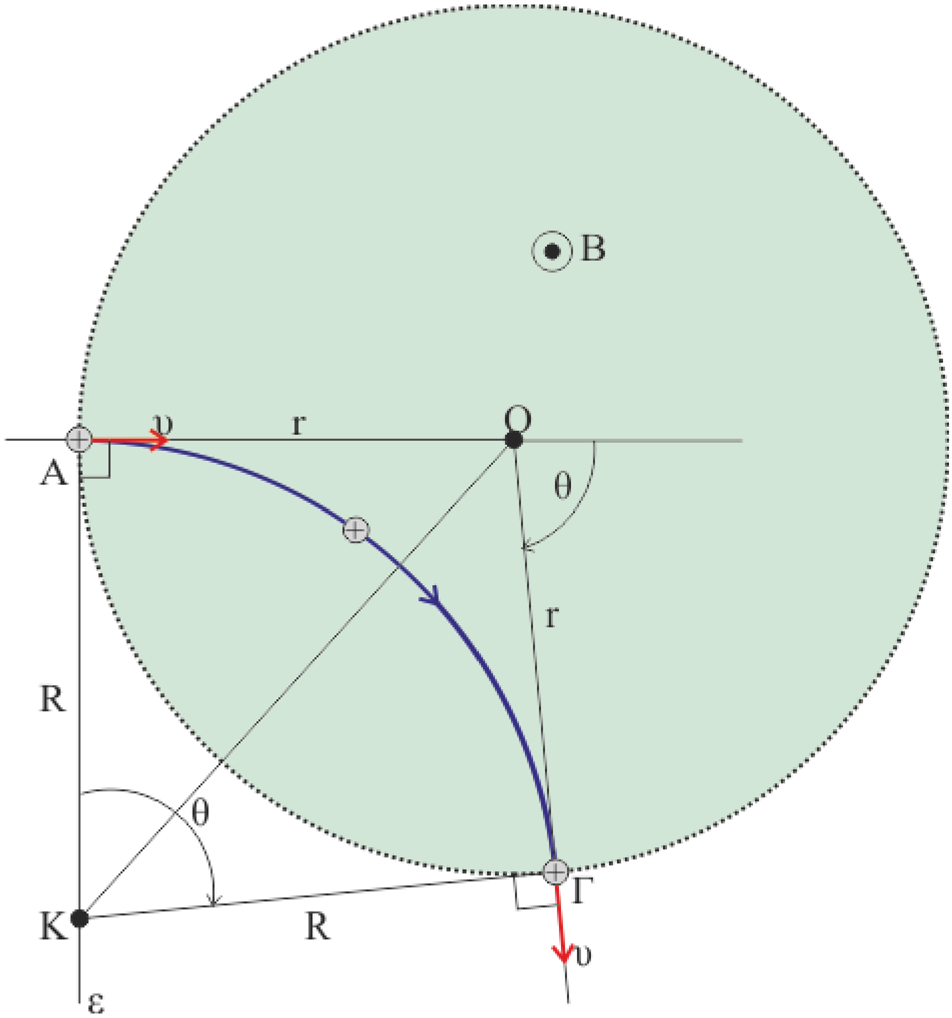
Το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς θα βρίσκεται επί της ε (κάθετη στην ταχύτητα στο σημείο εισόδου και εφαπτόμενη της κυκλικής διατομής του μαγνητικού πεδίου). Η τομή της καθέτου στην ταχύτητα κατά την έξοδο στο Γ με την ε θα είναι το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς.

Ισχύουν:

$$\begin{pmatrix} \text{ΓΚ} \perp \vec{\upsilon}\,(\text{στο Γ}) \\ \angle\text{ΚΑΟ} = \angle\text{ΚΓΟ}\,(\text{ίσες πλευρές}) \rightarrow \angle\text{ΚΓΟ} = \angle\text{ΚΑΟ} = 90^0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \text{ακτίνα ΟΓ στην προέκταση} \\ \text{της ταχύτητας (στο Γ)} \end{Bmatrix}$$

Η **γωνία εκτροπής** $\angle\text{ΑΚΓ} = \theta$, λόγω της ισότητας των δύο ορθογώνιων τριγώνων, διχοτομείται από την ΚΟ. Από το σχήμα προκύπτει η:

$$\tan(\theta/2) = \frac{r}{R} = \frac{r}{\upsilon}\omega,\ \ \omega = \frac{q}{m}B,\ \ 0 < \theta < \pi$$



Σχήμα 9: Κάτοψη της κίνησης

Διερεύνηση σχέσης (η γωνιακή ταχύτητα – συχνότητα κυκλότρου δεν εξαρτάται από την ταχύτητα του σωματιδίου, αλλά καθορίζεται αποκλειστικά από το ειδικό του φορτίο και την ένταση του μαγνητικού πεδίου). Η εκτροπή θ:

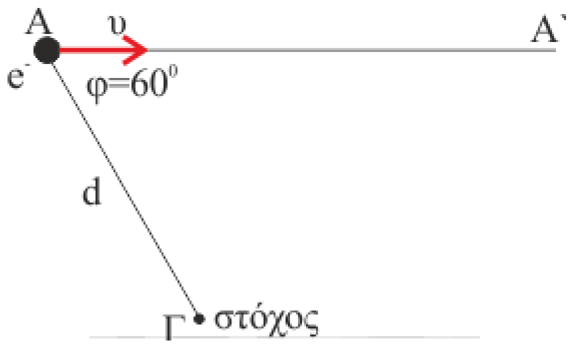
1. Μικραίνει (όπως και ο χρόνος παραμονής στο πεδίο, βλέπε παρακάτω στο Δ) αν το σωματίδιο κινείται γρηγορότερα καθώς η ακτίνα μεγαλώνει και το κέντρο Κ απομακρύνεται από το σημείο εισόδου Α (και αντιστρόφως).
2. Μεγαλώνει αν το ειδικό φορτίο είναι μεγαλύτερο ή το μαγνητικό πεδίο ισχυρότερο.
3. Μεγαλώνει αν το μαγνητικό πεδίο εκτείνεται σε ευρύτερο χώρο (μεγαλύτερο r).
4. Ο χρόνος παραμονής εντός του μαγνητικού πεδίου θα είναι $t = \frac{\theta}{\omega}$ και το διαγραφόμενο τόξο θα έχει μήκος $s = \upsilon t = \upsilon \frac{\theta}{\omega} = R\theta$.

$$\tan\left(\theta/2\right)=\frac{r}{R}=\frac{\omega r}{\upsilon}\;\text{αν}\begin{cases}\text{αν } r<R \text{ ή } \omega r<\upsilon \rightarrow \tan\left(\theta/2\right)<1\rightarrow \theta/2<\pi/4\rightarrow \theta<\pi/2\\ \text{αν } r=R \text{ ή } \omega r=\upsilon \rightarrow \tan\left(\theta/2\right)=1\rightarrow \theta/2=\pi/4\rightarrow \theta=\pi/2 \;\; \text{ΑΟΓΚ=τετράγωνο}\\ \text{αν } r>R \text{ ή } \omega r>\upsilon \rightarrow \tan\left(\theta/2\right)>1\rightarrow \theta/2>\pi/4\rightarrow \theta>\pi/2\end{cases}$$

5. $$\text{πχ για}: \theta=120^0 \rightarrow \tan\left(\theta/2\right)=\sqrt{3}\rightarrow \sqrt{3}=\frac{r}{R}\;\text{πρέπει}\; R=\frac{\sqrt{3}}{3}r\rightarrow \frac{\upsilon}{\omega}=\frac{\sqrt{3}}{3}r\rightarrow \upsilon=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega r=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{q}{m}B\right)r$$

Εφαρμογή Της Κίνησης Φορτίου Σε Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο

Ηλεκτρόνια επιταχύνονται υπό την επίδραση τάσης $V=10^3\ V$. Μόλις εξέλθουν από το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο Α (Σχήμα 10), κινούνται ευθύγραμμα κατά μήκος της AA'. Στο σημείο Γ και σε απόσταση $d=5\ cm$ από το Α βρίσκεται ένας στόχος, η δε ευθεία ΑΓ σχηματίζει γωνία $\varphi=60^0$ με την AA'. Αν το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου αντιστοίχως είναι $e=1,6\cdot 10^{-19}\ C$ και $m_e=9,1\cdot 10^{-31}\ kg$ ποιο πρέπει να είναι το μέτρο ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου ώστε τα ηλεκτρόνια που εξέρχονται από το ηλεκτρικό πεδίο να καταλήγουν στο στόχο αν το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$



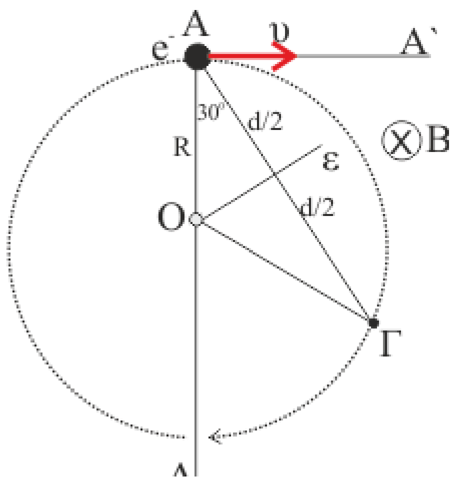
1. Έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του σχήματος.
2. Έχει διεύθυνση παράλληλη στην ευθεία ΑΓ.

Θεωρήστε στο 2 ότι το μέτρο του μαγνητικού πεδίου δεν υπερβαίνει την τιμή $B_{\max}=0,03\ T$.

Απάντηση

Το ηλεκτρόνιο μετά την έξοδό του από το ηλεκτρικό πεδίο στο Α έχει ταχύτητα που υπολογίζεται από τη σχέση (Σχήμα 11):

$$\text{ΘΜΚΕ}: \Delta K=W\rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2=eV\rightarrow \upsilon=\sqrt{\frac{2eV}{m}}$$



Σχήμα SEQ Σχήμα * ARABIC 11

1. Με την είσοδό του (κατά τα γνωστά από τη θεωρία, Σχήμα 11) στο μαγνητικό πεδίο, λόγω της δύναμης Lorentz, διαγράφει κυκλική τροχιά που το κέντρο της πρέπει να βρίσκεται επί της καθέτου ΑΔ της AA' και να διέρχεται από το Γ. Το τμήμα ΑΓ πρέπει να αποτελεί χορδή του διαγραφόμενου κύκλου η μεσοκάθετη ε της οποίας διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου. Έτσι το Ο θα είναι η τομή της

μεσοκαθέτου ε του τμήματος ΑΓ και της ΑΔ. Από το σχήμα προκύπτει ότι η ακτίνα του διαγραφόμενου από το ηλεκτρόνιο κύκλου πρέπει να πληροί την

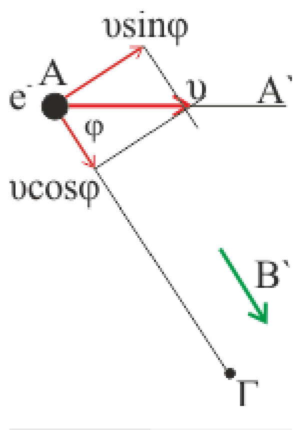
$$\cos\left(90^{\circ}-\varphi\right)=\frac{d/2}{R}\rightarrow R=\frac{d}{2\sin\varphi}$$

Από τη γνωστή σχέση για την ακτίνα και από τις προηγούμενες παίρνουμε:

$$\left.\begin{cases}\upsilon=\sqrt{\dfrac{2eV}{m}}\\ R=\dfrac{d}{2\sin\varphi}\\ R=\dfrac{m\upsilon}{eB}\end{cases}\right\}\rightarrow B=\frac{m\upsilon}{eR}=\frac{m\sqrt{\dfrac{2eV}{m}}}{e\dfrac{d}{2\sin\varphi}}=\frac{2m\sin\varphi}{ed}\sqrt{\frac{2eV}{m}}=\frac{2\sin\varphi}{d}\sqrt{\frac{2mV}{e}}\rightarrow$$

$$B=\left(\frac{2}{d}\sqrt{\frac{2mV}{e}}\right)\sin\varphi=\left(\frac{2}{5\cdot10^{-2}\ m}\sqrt{\frac{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\ kg\cdot10^{3}\ V}{1{,}6\cdot10^{-19}\ C}}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=3{,}6\cdot10^{-3}\ T$$

2. Στην περίπτωση αυτή (Σχήμα 12, έστω $\vec{B}'$ το μαγνητικό πεδίο) το ηλεκτρόνιο θα διαγράψει σπειροειδή τροχιά (κατά τη θεωρία). Συνδυασμός ταυτόχρονης κυκλικής κίνησης και ευθύγραμμης ομαλής κατά την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου ΑΓ. Η έλικα εφάπτεται της ευθείας ΑΓ. Αναλύουμε την ταχύτητα σε κάθετη και σε παράλληλη προς τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}'$ συνιστώσες για τις αναφερόμενες κινήσεις. Έχουμε:



$$\upsilon=\sqrt{\frac{2eV}{m}},\ \begin{cases}\upsilon_{\parallel}=\upsilon\cos\varphi\\ \upsilon_{\perp}=\upsilon\sin\varphi\end{cases},\ R=\frac{m\upsilon_{\perp}}{eB}=\frac{m\upsilon\sin\varphi}{eB'},\ T=\frac{2\pi m}{eB'},\ \beta=\upsilon_{\parallel}\mathrm{T}$$

Μετά από μια περίοδο το ηλεκτρόνιο θα βρεθεί επί της ευθείας ΑΓ και σε απόσταση $\beta=\upsilon_{\parallel}\mathrm{T}$ από το Α. Το ίδιο μετά από μια περίοδο ακόμα, κοκ. Εφόσον η τροχιά πρέπει να διέλθει από το στόχο στο Γ θα πρέπει η απόσταση d να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του βήματος β της έλικας (β= η μετατόπιση στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου σε χρόνο μιας περιόδου). Έχουμε:

$$\beta = \upsilon_{\parallel} T = \upsilon \cos\varphi \frac{2\pi m}{eB'} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \cos\varphi \frac{2\pi m}{eB'} = \frac{2\pi \cos\varphi}{B'} \sqrt{\frac{2mV}{e}}$$

$$d = n\beta = n\left(\frac{2\pi}{B'}\sqrt{\frac{2mV}{e}}\right)\cos\varphi \to B' = n\left(\frac{2\pi}{d}\sqrt{\frac{2mV}{e}}\right)\cos\varphi,\ n \in N \to$$

$$B' = n\left(\frac{2\pi}{d}\sqrt{\frac{2mV}{e}}\right)\cos\varphi = n\left(\frac{2\pi}{5\cdot 10^{-2}\ m}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\ kg\cdot 10^{3}\ V}{1{,}6\cdot 10^{-19}\ C}}\right)\cos\varphi$$

$$= n\left(1{,}256\cdot 10^{2}\cdot 1{,}07\cdot 10^{-4}\right)\cos\varphi = n\left(1{,}35\cdot 10^{-2}\right)\cos\varphi$$

$$B'\left(60^{0}\right) = \left(1{,}35\cdot 10^{-2}\right)\frac{1}{2}n = n\left(6{,}75\cdot 10^{-3}\right)\ T,\ n \in N$$

Αν η ένταση του μαγνητικού πεδίου δεν πρέπει να ξεπερνά το $B'_{\max} = 0{,}03\ T$, τότε οι τιμές της έντασής του είναι

$$B' \le B_{\max} \to n\left(6{,}75\cdot 10^{-3}\right) \le 0{,}03 \to n \le \frac{30\cdot 10^{-3}}{6{,}75\cdot 10^{-3}} = 4{,}4 \to n = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \to B' = \begin{Bmatrix} 6{,}75 \\ 13{,}5 \\ 20{,}25 \\ 27 \end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}\ T$$