

Correction

Correction sujet 2007:/80

I. Cosmologie de la Vilette:/23,5

A. Etude cinématique:/6

I.A.1.	$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$
I.A.2.	$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$
I.A.3.	$\vec{a}(M) = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right)\vec{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right)\vec{e}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z$
I.A.4.	$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = r\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = r\left(a\cdot\vec{e}_\theta\right)$

B. Etude dynamique et énergétique:/17,5

I.B.1	$\vec{f}_{1/2} = \frac{-Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}$
I.B.2	$\vec{f}_{1/2} = \frac{-Gm_1m_2}{r^2}\vec{u} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}$ alors $E_p = \frac{-Gm_1m_2}{r}$
I.B.3	La normale est dans le plan de symétrie de la surface donc $\vec{R}_N$ est dans la plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ donc $R_\theta = 0$
I.B.4	Les forces qui s'exercent sur la masse sont : - le poids $m\vec{g}$ qui dérive d'une énergie potentielle : $E_p = mgz = -\frac{mgk}{r}$ - la réaction normale qui ne travaille pas.
I.B.5.	En écrivant le principe fondamental, $m\vec{a} = \vec{R}_N + m\vec{g}$ En projetant dans la base cylindrique, $m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = R_r$ (1); $\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$ (2); $\frac{d^2z}{dt^2} = -mg + R_z$ (3)
	De (2), on en déduit $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$ alors $r^2\frac{d\theta}{dt} = C = cte$
I.B.6	Comme nous n'avons que des forces conservatives et des forces qui ne travaille pas, il y a conservation de l'énergie mécanique :

Tournez la page SVP

$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}m \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) + mgz$ $E_m = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \left(1 + \frac{k^2}{r^4} \right) + \frac{1}{2}m \frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r} \quad \text{car} \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{k}{r^2} \frac{dr}{dt}$	
On en déduit : $\alpha = 1 + \frac{k^2}{r^4}$	
L'énergie est conservée.	
B.7 Si $E_0 > 0$, l'état est libre et si $E_0 < 0$, l'état est lié.	
I.B.8 Le mouvement est circulaire si $\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2}m \frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r} \right) = 0$ alors $m \frac{C^2}{r^3} = \frac{mgk}{r^2} \quad ; \quad r_c = \frac{C^2}{gk}$	
I.B.9 Il faut lancer la bille suivant e_θ. Si r est constant z aussi. $r_0 = \frac{C^2}{gk} = \frac{r_0^2 v_0^2}{gk} \quad \text{alors} \quad v_0^2 = \frac{gk}{r_0}$	

II. Thermodynamique appliquée au corps humain /56.5

II.1. Régime permanent : /8

II.1.1 Comme $\phi = jS$, $j(x)$ s'exprime en $W \cdot m^{-2}$ vecteur densité d'énergie
II.1.2 Comme $\vec{J}(x) = -\lambda \overrightarrow{grad}(T)$
II.1.3 lors $[\lambda] = \frac{[Puis.L^{-2}]}{[\Theta/L]}$ en $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$
II.1.4. Exprimons la conservation locale de l'énergie : (Énergie qui entre en x) – (énergie qui sort en $x+dx$) = (variation de l'enthalpie de la tranche d'épaisseur dx pendant dt) = 0 en régime stationnaire.
$d(\delta H) = 0 = [J_x S]_x - [J_x S]_{x+dx} \quad \text{ou} \quad -\frac{\partial j}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0$

II.1.5 Par une double intégration, nous obtenons $T(x) = C_1 x + C_2$. Compte-tenu des conditions aux limites, la distribution de température devient $T(x) = (T_L - T_0) \frac{x}{L} + T_0$ et $J(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{L} (T_0 - T_L) > 0$ car le flux thermique se dirige de la température la plus élevée vers la température la plus faible.

II.2 Résistance thermique due à la conduction: /4 ,5

II.2.1 Le loi d'ohm locale est $j = -\gamma \text{grad}(T)$
 C'est l'équivalent de deux résistances électriques en série car $T \Leftrightarrow U$ et $I \Leftrightarrow P$
 II.2.2. La puissance thermique est le flux du vecteur densité volumique de courant thermique $P_{th} = J \cdot S$. En remplaçant j par son expression, $P_{th} = \frac{\lambda S}{L} (T_0 - T_L)$, ce qui implique $T_0 - T_L = \frac{L}{\lambda S} P_{th}$. $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$ est l'analogue de la résistance électrique avec R_{th} en $K \cdot W^{-1}$.

II.3. Association de résistance thermique : /6

II.3.2.a Nous avons pour A_1 , $T_0 - T_1 = R_{th1} P_{th}$ et pour A_2 , $T_1 - T_2 = R_{th2} P_{th}$ avec la même puissance P_{th} puisqu'il n'y a pas de fuites latérales. Les résistances thermiques associées en série s'ajoutent.

III.3.2.b. Nous obtenons alors $T_0 - T_2 = (R_{th1} + R_{th2}) P_{th}$.

III.3.2.c : On a un diviseur de tension thermique : $T_1 - T_0 = (T_2 - T_0) \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ alors $T_1 = \frac{R_1 T_2 + R_2 T_0}{R_1 + R_2}$

II.3.3 Dans cette situation, les puissances thermiques s'ajoutent T_0 , ce qui conduit à $P_{th} = P_1 + P_2 = \frac{T_1 - T_0}{R_{th1}} + \frac{T_1 - T_0}{R_{th2}} = (T_1 - T_0) \left(\frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}} \right) = \frac{(T_1 - T_0)}{R_{th}}$; $R_{th} = \frac{R_{th1} R_{th2}}{R_{th1} + R_{th2}}$ Les conductances thermiques associées en parallèle s'ajoutent comme deux conductances électriques.

II.4. Transfert convectif : /1

Pour un transfert convectif, $T - T_a = \frac{P}{\alpha S} = R_c P$. La résistance thermique de convection vaut donc $R_{thc} = \frac{1}{\alpha S}$.

II.5. Transfert radiatif : /1

Tournez la page SVP

Pour un transfert radiatif, $T - T_a = \frac{P}{KS} = R_R P$. La résistance thermique de convection vaut donc $R_{thr} = \frac{1}{KS}$.

II.6. Etude du corps humain :/23

I.6.1 $P_M = \frac{13.10^6}{24.3600} = 150W$

I.6.2 $R_{thr} = \frac{1}{KS} = 0.133 \text{ K} \times \text{W}^{-1}$ alors $P_R = \frac{\Delta T}{R_R} = 75 \text{ W}$

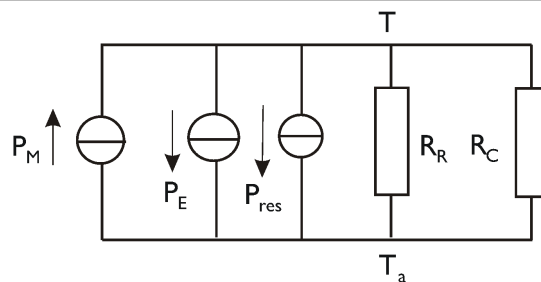
I.6.3 $R_{thc} = \frac{1}{\alpha S} = 0,167 \text{ K} \times \text{W}^{-1}$ alors $P_c = \frac{\Delta T}{R_c} = 60W$

I.6.4 $P_E = mL = 8 \text{ W}$

I.6.5 $P_{res} = P_M - P_R - P_C - P_E = 7W$

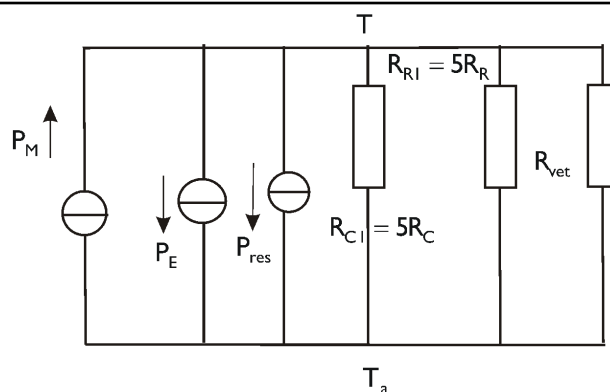
I.6.6. a $V - V_a = (R_1 // R_2)(I - I_1 - I_2)$: Attention, le sujet a mis des générateurs sur la figure, ce sont seulement des tensions pour avoir l'analogie. Dans les générateurs, les courants sont non nuls à priori.

I.6.6. b La différence entre la puissance du métabolisme, P_E et P_{res} est évacuée soit par rayonnement soit par conduction : La puissance est l'équivalent de I donc d'une source de courant et la température joue le rôle de la tension d'où la schéma :



I.6.7.a Les parties couvertes ne peuvent plus être par radiation et convection mais seulement par conduction. C'est la résistance R_3 .

Comme la résistance est inversement proportionnelle à sa surface, les résistances convective et de rayonnement sont multipliées par 5. Les 3 résistances sont R_3 , $R'_1 = R_c / 0,2 = 5R_1$ et $R'_2 = R_2 / 0,2 = 5R_2$ en contact avec l'air, montées en parallèle.



II.6.7.b La puissance étant la même, il suffit de comparer $\frac{\Delta T}{R_{eq}} = \frac{\Delta T'}{R'_{eq}}$ alors :

• En l'absence de vêtement, $R_{eq} = \frac{R_R R_c}{R_R + R_c}$.

• En présence de vêtement, $G'_{eq} = \frac{1}{5R_c} + \frac{1}{5R_R} + \frac{1}{R_{vet}}$

alors $\frac{R_R R_c}{R_R + R_c} \left(\frac{1}{5} \frac{R_R + R_c}{R_R R_c} + \frac{1}{R_{vet}} \right) = \frac{\Delta T}{\Delta T'}$

soit $R_{vet} = \frac{R_R R_c}{R_R + R_c} \left(1 / \left(\frac{\Delta T}{\Delta T'} - \frac{1}{5} \right) \right) = 0,13 \text{ K} \times \text{W}^{-1}$

II.6.8 a) La variation d'énergie est $dU = CdT$

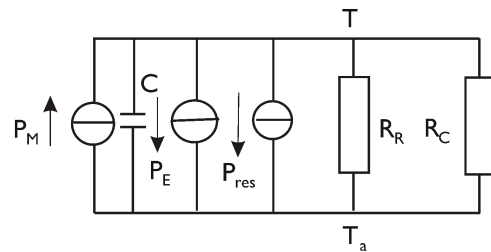
$$\delta Q_r = - \frac{(T - T_a)}{R_R} dt ;$$

$$\delta Q_c = - \frac{(T - T_a)}{R_c} dt$$

$$\delta Q = \left(\underset{\text{reçu}}{P_M} - \left(\underset{\text{cédée}}{P_c} + P_R \right) \right) dt$$

En appliquant le 1^{er} principe

$$dH = CdT = \left(P_M - P_E - P_R - \frac{T - T_a}{R_c} - \frac{T - T_a}{R_R} \right) dt$$



b) avec $\tau = \frac{R_c R_R C}{R_c + R_R}$ Attention il manque le (-) dans la formule de l'énoncé.

c) et $B = \frac{P_M - P_E - P_R}{C}$

II.6.9 τ est divisé par 25 alors $\frac{25}{\tau} = \frac{1}{\tau'}$ soit $25 \left(\frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_R} \right) = \frac{1}{R_{eau}} + \frac{1}{R_R}$; $R_{eau} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ K} \times \text{W}^{-1}$

II.7 Etude expérimentale :/13

II.7.1 $C_{pa} = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} = \frac{P_0 h L \gamma}{T_a (\gamma - 1)} = \frac{10^5 \times 7,5 \times 10 \times 4 \times 1,4}{293 \times 0,4} = 3,6 \cdot 10^5 \text{ J/K}$

II.7.2 a) $dH_m + dH_{air} = (C_{pa} + C_m) dT$

$$\delta Q_1 = -\beta' (T - T_{ext}) dt \quad \text{et} \quad \delta Q_2 = -N\beta (T - T_{peau}) dt$$

$$dH_{fonct} = dH_m + dH_{air} = (C_{pa} + C_m) dT \underset{P=cte}{=} \left(-(N\beta + \beta') T + N\beta T_{peau} + \beta' T_{ext} \right) dt \quad \text{alors}$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{N\beta + \beta'}{C_p + C_m} T = \frac{N\beta T_{peau} + \beta' T_{ext}}{C_p + C_m} \quad \text{alors} \quad \tau_1 = \frac{C_{pa} + C_m}{N\beta + \beta'} \quad \text{et} \quad T_{\infty,1} = \frac{N\beta T_{peau} + \beta' T_{ext}}{N\beta + \beta'}$$

Tournez la page SVP

b) De même	$\frac{dT}{dt} + \frac{\beta'}{C_p + C_m} T = \frac{\beta' T_{ext}}{C_p + C_m} \quad \tau = \frac{C_{pa} + C_m}{\beta'} \quad \text{et} \quad T_{\infty,2} = T_{ext}.$
II.7.3	$T(t) = (T_0 - T_{\infty}) \exp(-t/\tau) + T_{\infty}$ dans les deux cas.
II.7.4	$\tau = \frac{C_p + C_m}{N\beta + \beta'} = 2000s \quad \text{et} \quad \tau' = \frac{C_p + C_m}{\beta'} = 2400s \quad \text{alors} \quad \beta' = 254 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{et}$ $\frac{\tau'}{\tau} = 1 + \frac{N\beta}{\beta'} \quad \text{alors} \quad \beta = \left(\frac{\tau'}{\tau} - 1 \right) \frac{\beta'}{N} : \quad \beta = 1,4 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$
De même, on en déduit	$T_{ext} = 20,8^{\circ}\text{C} \quad \text{et} \quad T_{peau} = \frac{T_{\infty,1}(N\beta + \beta') - \beta' T_{ext}}{N\beta} = 35,3^{\circ}\text{C}$
La puissance en régime permanent émis par un homme est $P = 13,7W$. Il suffit de comparer avec la puissance émise par les 20% non couverts soit 13.2 W. On a un bon ordre de grandeur.	