

1^{ère} partie : optique linéaire cristalline*Cas d'un matériau isotrope*

1°) $\vec{D} = \epsilon_0(1+\chi)\vec{E}$ et $0 = \text{div}(\vec{D}) = \epsilon_0\epsilon_r \text{div}(\vec{E})$ pour un milieu homogène.

$$2^\circ) \quad \text{rot}\left(\text{rot}\left(\vec{E}\right)\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\vec{B}) = -\mu_0\epsilon_0\epsilon_r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

$$3^\circ) \quad \text{rot}\left(\text{rot}\left(\vec{E}\right)\right) \approx E/m^2 \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \approx E/s^2 \text{ donc } \mu_0\epsilon_0\epsilon_r \approx (s/m)^2 = 1/v^2$$

$$4^\circ) \quad n = (\epsilon_r)^{1/2}$$

5°) $\text{div}(\vec{D}) = 0$ entraîne $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$ donc $\vec{k} \cdot (\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})) = k^2 \vec{E} = (n\omega/c)^2 \vec{E}$ et $k = n\omega/c$

6°) $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 = \vec{k} \cdot \text{Re}(\vec{E})$ et $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$ et $\vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \vec{E}$ d'où, en prenant les parties réelles, $\vec{k} \cdot \text{Re}(\vec{E}) = 0 = \vec{k} \cdot \text{Re}(\vec{B})$ et $\vec{k} \wedge \text{Re}(\vec{E}) = \omega \text{Re}(\vec{B})$ et $\vec{k} \wedge \text{Re}(\vec{B}) = -\omega \text{Re}(\vec{E})$ puisque $\vec{k}$ est réel. On peut alors passer à l'interprétation géométrique.

$$7^\circ) \quad \Pi = n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \text{Re}^2 \left(\vec{E} e^{j(\omega t - kZ)} \right)$$

$$8^\circ) \quad I = (1/2)n |\vec{E}|^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$$

$$9^\circ) \quad P = IS = I\pi W^2$$

Cas d'un matériau anisotrope uniaxe

$$10^\circ) \quad \epsilon_r = \begin{bmatrix} 1+\chi_o & 0 & 0 \\ 0 & 1+\chi_o & 0 \\ 0 & 0 & 1+\chi_e \end{bmatrix}$$

$$11^\circ) \quad 0 = \text{div}(\vec{D}) = \epsilon_0(1+\chi_o) \text{div}(\vec{E}) + \epsilon_0(\chi_e - \chi_o) \partial E_z / \partial z$$

12°) Pour E parallèle à x ou y : $n^2 = n_o^2 = (1+\chi_o)$ et pour E parallèle à z : $n^2 = n_e^2 = \epsilon_0(1+\chi_e)$.

13°) Onde (-) : $\vec{D}$ est tangent au cercle, vers le haut et $\vec{B}$ est parallèle et de même sens que $\vec{D}$

Onde (+) : $\vec{E}$ est rentrant dans la feuille et $\vec{\Pi}$ est orthogonal à $\vec{E}$ vers le haut à droite.

Angle de double réfraction et expressions des indices

14°) $\theta = 0$ ou 90°

15°) $(z/n_o)^2 + (x/n_e)^2 = 1$, avec $z = n^{(+)} \cos(\theta)$ et $x = n^{(+)} \sin(\theta)$, d'où $n^{(+2)} = [(\cos(\theta)/n_o)^2 + (\sin(\theta)/n_e)^2]^{-1}$.

16°) $p = dz/dx = -\sin(\theta)n_o^2/[\cos(\theta)n_e^2]$

17°) ρ est l'angle entre le vecteur (dx, dy) , de norme $dx[1 + \sin^2(\theta)n_o^4/[\cos(\theta)n_e^2]^2]^{1/2}$, et le vecteur $(z, -x)$, d'où $\cos(\rho) = [(\cos(\theta)n_e^2)^2 + (\sin(\theta)n_o^2)^2]/[(\cos(\theta)n_e^2)^2 + (\sin(\theta)n_o^2)^2]^{1/2}$.

18°) $\cos(\rho) = 0,999752$ et $\rho = 1,27606^\circ$ et $n^{(+)}(\theta_{AP}) = 3,53040$.

19°) Dans l'air les deux rayons sont parallèles à $\vec{z}$ (Descartes et retour inverse)

20°) $L_{\text{sep}} = 2W/\tan(\rho) = 8986 \mu\text{m}$

2^{ème} partie : optique non linéaire – aspect ondulatoire

Mise en équation

1°) $\vec{E}(2\omega) = \vec{E}_B(2\omega) + \vec{E}_{NL}(2\omega)$.

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E}_3)) = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\epsilon_0 \epsilon_{r3} \vec{E}_3 + \vec{E}_{NL}(2\omega)] \text{ car } \epsilon_0 \vec{E}_3 + \vec{E}_B(2\omega) = \epsilon_0 \epsilon_{r3} \vec{E}_3.$$

2°) $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E}_3)) = \text{grad}(\text{div}(\vec{E}_3)) - \Delta \vec{E}_3 = -\partial^2 \vec{E}_3 / \partial Z^2$.

3°) $\partial^2 \vec{E}_3 / \partial Z^2 = [\partial^2 \vec{E}_3 / \partial Z^2 - 2jk_3 \partial \vec{E}_3 / \partial Z - k_3^2 \vec{E}_3] e^{j(\omega t - kZ)} \vec{e}_3$

4°) D'où, en négligeant le terme $\partial^2 \vec{E}_3 / \partial Z^2$ devant les deux suivants, puis en reportant dans 1°) et en égalant les termes en k_3^2 et en ω^2 , il reste l'égalité demandée.

5°) $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$.

6°) $\vec{E}_3(Z) = -j\omega/(cn_3)\chi_{\text{eff}}^{(2)} \vec{E}_1 \vec{E}_2 (e^{j\Delta k Z})/(j\Delta k) + \text{cst}$, d'où, en prenant $\vec{E}_3(Z=L) = 0$, $\vec{E}_3(Z) = -\omega/(cn_3\Delta k)\chi_{\text{eff}}^{(2)} \vec{E}_1 \vec{E}_2 (e^{j\Delta k Z} - 1)$

7°) $\vec{E}_3(Z) = -\omega/(cn_3\Delta k)\chi_{\text{eff}}^{(2)} \vec{E}_1 \vec{E}_2 e^{j\Delta k Z/2} 2j \cdot \sin(\Delta k L/2)$ d'où, après calculs, la formule demandée.

Accord de phase

8°) I_3 est périodique sauf si $\Delta k = 0$ et alors I_3 varie comme L^2 .

9°) $k_3 = k_1 + k_2$ donne, après simplification par ω/c , $2n_3 = n_1 + n_2$, qui est bien satisfaite si $n_3 = n_1 = n_2$.

10°) En notant N les indices correspondant à 2ω , on voit que $(n_1 + n_2) \leq 2n^{(+)}(\omega) < 2N^{(+)}$ et que $2n^{(-)}(\omega) < 2N^{(-)}$. Les seules égalités possibles sont donc : $n^{(+)} + n^{(-)} = 2N^{(-)}$ ou $2n^{(+)} = 2N^{(-)}$. E_3 est donc ordinaire.

11°) $n^{(+)}(\omega, \theta) = n^{(-)}(2\omega, \theta)$.

12°) Il faut que le cercle $n_o(2\omega)$ coupe l'ellipse $n_e(\omega)$.

13°) $\cos^2(\theta_{AP}) = n_o^2(n_e^2 - N_o^2) / [N_o^2(n_e^2 - n_o^2)]$ où N correspond à 2ω .

14°) $\theta_{AP} = 33,58^\circ$ et $n_e = N_o = 3,53040$

Effet de l'angle de double réfraction sur la puissance générée

$$2 \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} \frac{\omega^2}{c^2} (\chi_{\text{eff}}^{(2)})^2$$

15°) $I_3(2\omega, L) = \frac{n_1^3}{I_1 I_2 L^2}$ et $dP_3(2\omega, L) = 2W.dX$. $I_3(2\omega, L)$.

16°) L'onde 3 étant ordinaire, son vecteur de Poynting est parallèle à Z et donc, I_3 provient de tous les points de la tranche compris entre les cotes Y et $Y+dY$, ce qui correspond à une longueur suivant Z égale à $L_{\text{sép}}$ (sauf pour les valeurs extrêmes de Y pour lesquelles la

$$2 \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} \frac{\omega^2}{c^2} (\chi_{\text{eff}}^{(2)})^2$$

longueur considérée est plus petite). On a donc $I_3(2\omega, L)_{\text{max}} = \frac{n_1^3}{I_1 I_2 L_{\text{sép}}^2}$.

17°) $dP_3(2\omega, L) = \int_0^{L \tan \rho} dY dX$. $I_3(2\omega, L) \approx dX.L \tan \rho$. $I_3(2\omega, L)_{\text{max}} = 2W dX (L/L_{\text{sép}}) I_3(2\omega, L)_{\text{max}}$

$$2 \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} \frac{\omega^2}{c^2} (\chi_{\text{eff}}^{(2)})^2$$

18°) En posant $2W dX \frac{n_1^3}{I_1 I_2} = A$, on a :

si $\rho = 0$ $dP_3(2\omega, L) = AL^2$

si $\rho \neq 0$ si $L < L_{\text{sép}}$ $dP_3(2\omega, L) = AL^2$

si $L > L_{\text{sép}}$ $dP_3(2\omega, L) = ALL_{\text{sép}}$

3^{ème} partie : optique non linéaire – aspect corpusculaire

1°) On a bien $\vec{k} \omega + \vec{k} \omega = 2 \vec{k} \omega$ et, pour des $\vec{p}$ parallèles, la conservation de $\vec{p}$ donne bien $k_3 = k_1 + k_2$.

$$2^\circ) \quad \partial N_1 / \partial Z = \partial N_2 / \partial Z = -\partial N_3 / \partial Z$$

3°) $0 = (\partial/\partial Z)(N_1 - N_2) = (\partial/\partial Z)(N_3 + N_2) = (\partial/\partial Z)(N_1 + N_3)$ d'où par intégration les relations demandées.

4°) $I_1(\omega, Z) = N_1(\omega, Z) \hbar \omega$ est bien en $J/(m^2s)$ et $I_2(\omega, Z) = N_2(\omega, Z) \hbar \omega$ et $I_3(2\omega, Z) = N_3(2\omega, Z) 2 \hbar \omega$.

$$5^\circ) \quad I_3(2\omega, Z) = N_3(2\omega, Z) 2 \hbar \omega = 2 \hbar \omega [N_1(\omega, 0) - N_1(\omega, Z)] \leq 2I_1(\omega, 0)$$

$$6^\circ) \quad |E_1(Z)|^2 + (1/2) |E_3(Z)|^2 = |E_1(0)|^2$$

7°) $d|E_3(Z)|^2 = \omega/(cn_3)\chi_{\text{eff}}^{(2)} [|E_1(0)|^2 - n_3/(2n_1) |E_3(Z)|^2] dZ$ d'où, en séparant les variables, $dZ = \dots$ puis l'intégrale du texte.

$$8^\circ) \quad I_3(2\omega, Z) = 2I_1(\omega, 0) \tanh^2(\varphi) \quad \text{où} \quad \varphi = \frac{\omega \chi_{\text{eff}}^{(2)}}{c\sqrt{2n_1 n_3} |E_1(0)|^2} Z$$

9°) Donc $I_3(2\omega, Z) \leq 2I_1(\omega, 0)$ et, si φ est petit devant 1, $\tanh^2(\varphi) \approx \varphi^2$ et on retrouve bien le résultat de la question II-7 (lorsque $\Delta k = 0$).

$$10^\circ) \quad I_1(\omega, Z) = I_1(\omega, 0) [1 - \tanh^2(\varphi)].$$

$$11^\circ) \quad I_1(\omega, Z) \text{ décroissant de } I_1(\omega, 0) \text{ à } 0 \text{ et } I_3(2\omega, Z) \text{ croissant de } 0 \text{ à } 2I_1(\omega, 0).$$

12°) $\tanh^2(\varphi) = 1/2$ donc $\varphi \approx 0,9$ donc $L_{1/2} \approx 7.10^{-5} < 0,005$ donc l'approximation de la pompe non dépeuplée n'est pas valable.

4^{ème} partie : synthèse

$$1^\circ) \quad L_{1/2} < L < L_{\text{sép}} \text{ donc expression en } \tanh^2(\varphi).$$

$$2^\circ) \quad P_{\text{tot}}(\omega, 0) = 2\pi W^2 I_1(0) = 62,83 \text{ W et } \eta = \tanh^2(\varphi) = 1 = 0,00415$$

$$\text{rem : } E_1(0) = 4,621.10^5 \text{ V/m et } \frac{\omega \chi_{\text{eff}}^{(2)}}{c\sqrt{2n_1 n_3}} L = 1,396.10^{-7} \text{ m/V.}$$