

CORRIGÉ

Première partie

1.a. L'équation de continuité (conservation de la matière) s'écrit ici:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\rho}{t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \{ \vec{v} \} = 0$$

puisque le fluide est incompressible, ce qui montre l'existence d'au moins une fonction potentiel-vecteur $\vec{A}$, telle que:

$$\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Le choix proposé par l'énoncé amène à réécrire cette équation sous la forme:

$$\vec{A} = A(x, y) \vec{e}_z \Rightarrow \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\partial A}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial A}{\partial x} \vec{e}_y$$

et il sera donc a priori possible de déterminer A en résolvant les deux équations aux dérivées partielles:

$$v_x(x, y) = \frac{\partial A}{\partial y} \text{ et } v_y(x, y) = -\frac{\partial A}{\partial x}$$

la fonction A étant alors bien sûr déterminée à une constante additive près.

On vérifie alors immédiatement que ce potentiel vecteur vérifie la « jauge de Coulomb », ou plutôt son extension à ce domaine de la physique:

$$\operatorname{div} \{ \vec{A} \} = \frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

1.b. Les équations écrites ci-dessus deviennent:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = v_0 \text{ et } \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

d'où la solution possible:

$$A_0 = v_0 y = v_0 r \sin \varphi$$

2.a. Si l'écoulement est irrotationnel, on pourra écrire:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$$

puisque la divergence du potentiel vecteur est nulle, soit encore pour la fonction A scalaire:

$$\Delta A = 0$$

qui constitue l'équation demandée (sauf éventuellement sur l'axe Oz).

2.b. Il suffit de vérifier cette équation différentielle soit, compte tenu du formulaire proposé:

$$DA_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_1}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{\partial A_1}{\partial r} = C_1$$

où C_1 est une certaine constante. On en déduit encore:

$$A_1 = C_1 \ln r$$

à une constante près qu'on omettra car elle ne présente pas d'intérêt dans la suite.

On en déduit la vitesse correspondante, utilisant l'expression cylindrique du rotationnel fournie dans l'énoncé:

$$\vec{v}_1 = -\frac{C_1}{r} \vec{u}_\varphi$$

On remarque bien sûr qu'il s'agit de l'analogue d'un champ magnétique (celui créé par un fil infini), d'où deux remarques. D'abord, le rotationnel n'est pas nul sur le fil lui-même (là où sont localisées les sources de ce champ. Ensuite, la circulation calculée à la question suivante est indépendante du choix du contour (cercle ou non) du moment qu'il entoure bien le fil une seule fois et dans le même sens que le cercle.

2.c. La circulation Γ s'écrit:

$$G = \int \vec{v}_1 \cdot d\vec{r} = - \int \frac{C_1}{r} \vec{u}_q \cdot r d\vec{u}_q = - 2pC_1$$

ce qui permet aussi d'écrire:

$$\vec{v}_1 = \frac{G}{2pr} \vec{u}_q \text{ et } A_1 = - \frac{G}{2p} \ln r$$

3.a. Le fluide ne peut passer à travers les parois du fil ni dans un sens ni dans l'autre; la vitesse doit donc rester **tangente** au fil:

$$\vec{v}(r = a) \cdot \vec{u}_r = 0$$

3.b. A grande distance du fil, la perturbation qu'il apporte doit disparaître et on doit donc retrouver le potentiel A_0 :

$$A(r, q) \underset{r \gg a}{\sim} v_0 r \sin q$$

3.c. La forme $A_2(r, \theta)$ suggérée convient si elle vérifie trois conditions:

i. L'équation différentielle $\Delta A_2 = 0$ soit:

$$\frac{\alpha}{r} \frac{1}{r} \left(r \frac{1}{r} \left(r + \frac{\beta}{r} \right) \right) \sin q - \frac{\alpha}{r^2} \left(r + \frac{\beta}{r} \right) \sin q = 0$$

dont on constate après développement qu'elle est automatiquement vérifiée, quels que soient α et β .

ii. La condition à la limite $r \gg a$:

$$f(r) = \alpha \left(r + \frac{\beta}{r} \right) \underset{r \gg a}{\sim} v_0 r \Rightarrow \alpha = v_0$$

iii. La condition à la limite $r = a$:

$$0 = \vec{u}_r \cdot \text{rot} \vec{A} \underset{r=a}{=} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{1}{r} \frac{f}{r} = 0q \text{ drarrow left } (a + \{ \beta \} \text{ over } \{ a \} \text{ right}) = 0 \text{ drarrow } \beta = - a r \text{Sup } \{ \text{size 8} \}$$

Finalement la solution qui convient s'écrit:

$$f(r) = v_0 r \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

La vitesse correspondante s'écrit, après développement du rotationnel de A_2 :

$$\vec{v}_2 = v_0 \cos q \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \vec{u}_r - v_0 \sin q \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \vec{u}_q$$

Il s'agit de la somme d'un champ uniforme et d'un dipôle linéique, qui est naturellement de rotationnel nul, donc de circulation identiquement nulle autour du fil, comme l'énonce l'admet d'ailleurs.

4.a. On vérifie à nouveau les trois conditions déjà énoncées:

i. L'équation de Laplace $\Delta A = 0$ étant linéaire, la somme de deux de ses solutions A_1 et A_2 est encore solution de l'équation de Laplace.

ii. A grande distance du fil, le terme $\vec{v}_1$ s'annule et on retrouve bien $\vec{v}_2$ seul qui redonne alors l'écoulement non perturbé $\vec{v}_0$.

iii. Enfin au voisinage du fil, on a vu que les deux champs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont tous deux tangents au fil; il en va de même de leur somme.

La circulation demandée est la somme des deux circulations précédemment calculées; elle vaut donc simplement

Γ.

4.b. Puisqu'à l'extérieur du fil, les deux champs de vitesse (et donc leur somme aussi) sont irrotationnels, on applique le théorème de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = cte$$

en l'absence de champ de pesanteur, en particulier entre la surface du fil (où le champ est orthoradial) et un point situé à grande distance:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p(r=a,q)}{\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{G}{2pr} - v_0 \sin q \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right) \right)_{r=a}$$

ou, après développement:

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \left[v_0^2 - \left(\frac{G}{2pa} - 2v_0 \sin q \right)^2 \right]$$

4.c. C'est bien sûr une conséquence de la symétrie particulière de la répartition des pressions. On peut par exemple écrire les forces de pression exercées sur le fil:

$$d^2 \vec{F} = - p \vec{u}_r a dz dq \Rightarrow \frac{d^2 F_x}{dz} = - a p(\sin q) \cos q dq$$

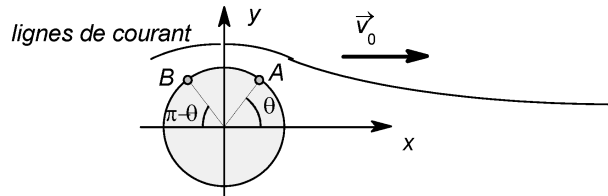
ou, en effectuant le changement de variable $s = \sin \theta$:

$$\frac{d^2 F_x}{dz} = - a p(s) ds \Rightarrow \frac{dF_x}{dz} = - a \int p(s) ds$$

mais $p(s)$ étant un polynôme (de degré 2), sa primitive est une fonction polynôme de s qui prend la même valeur en $-\pi$ et $+\pi$ d'où:

$$\frac{dF_x}{dz} = 0$$

On aurait aussi pu faire un simple schéma de la répartition des pressions:



et les points A et B subissant les mêmes pressions, les composantes horizontales des forces exercées se compensent.

Le même calcul que ci-dessus mène à l'expression de l'autre composante de la force:

$$\frac{dF_y}{dz} = - \int \left\{ p_0 + \frac{1}{2} \rho \left[v_0^2 - \left(\frac{G}{2pa} - 2v_0 \sin q \right)^2 \right] \right\} a \sin q dq$$

Les trois intégrales qui apparaissent après développement s'écrivent:

$$\int \sin q dq = 0 \quad \int \sin^2 q dq = p \int \sin^3 q dq = 0$$

et seul le double produit du développement n'est pas nul:

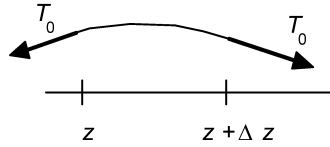
$$\frac{dF_y}{dz} = - \rho G v_0$$

4.d. Le problème évoqué ici est le même que celui précédemment évoqué à un changement de référentiel galiléen près, avec pour vitesse d'entraînement $\vec{u}$. La force exercée est bien sûr indépendante du référentiel galiléen choisi et on applique la relation suivante avec $\vec{u} = -v_0 \vec{e}_x$. L'expression de l'énoncé est bien égale à:

$$\vec{F}_M = \rho G \vec{e}_z \vec{u} \vec{u}$$

Seconde partie

1.a. Puisque la tension exercée sur les différents points du fil est constante en norme, seule sa direction varie; on peut donc l'écrire:



$$\vec{T}(z + Dz) = T_0 \vec{u}(z + Dz) \text{ et } \vec{T}(z) = -T_0 \vec{u}(z)$$

où le vecteur unitaire tangent en un point de la courbe s'écrit, de façon exacte:

$$\vec{u}(z) = \frac{d\vec{r}}{ds} \gg \frac{\frac{1}{z} \vec{r}}{\frac{1}{z}}$$

de façon approchée, le fil restant tendu et l'élément d'abscisse curviligne ds étant pratiquement confondu avec le déplacement horizontal dz .

On aura donc pour somme des deux forces exercées sur le brin de fil de longueur Δz :

$$\vec{F}_T Dz = \frac{1}{z} (T_0 \vec{u}(z)) Dz$$

soit enfin:

$$\vec{F}_T = T_0 \frac{\frac{1}{z} \vec{r}}{\frac{1}{z^2}}$$

1.b. En l'absence de toute force, l'application du principe fondamental de la dynamique au déplacement transversal de l'élément de longueur Δz de fil s'écrit:

$$dm \vec{a} = \vec{F}_T Dz \Rightarrow m Dz \frac{\frac{1}{t} \vec{r}}{\frac{1}{t^2}} = T_0 \frac{\frac{1}{z} \vec{r}}{\frac{1}{z^2}} Dz$$

qu'on écrira encore:

$$\frac{\frac{1}{t} \vec{r}}{\frac{1}{t^2}} = c^2 \frac{\frac{1}{z} \vec{r}}{\frac{1}{z^2}} \text{ o } c = \sqrt{\frac{T_0}{m}}$$

qui constitue l'équation d'onde demandée, à la vitesse de propagation c .

2.a. Une vibration monochromatique à la fréquence ν impose:

$$\vec{r}(z, t) = \vec{R}(z) e^{-i2\pi \nu t} \Rightarrow -(2\pi \nu)^2 \vec{R}(z) = c^2 \frac{d^2 \vec{R}}{dz^2}$$

dont la solution générale s'écrit:

$$\vec{R}(z) = \vec{K}_1 \cos(Lz) + \vec{K}_2 \sin(Lz) \text{ o } L = \frac{2\pi \nu}{c}$$

mais la fixation du fil aux deux extrémités impose:

$$\vec{R}(0) = \vec{R}(l) = 0 \Rightarrow \vec{K}_2 = \vec{0} \text{ et } \sin(\) = 0$$

Les valeurs de L sont donc quantifiées, avec:

$$L = n \frac{\pi}{l}$$

où n est un entier qui prend la plus petite valeur possible ($n = 1$) pour le mode fondamental. On aura donc dans ce cas:

$$\nu_0 = \frac{c}{2l}$$

On peut donner une autre démonstration de cette expression (ou une interprétation physique) en remarquant que la longueur d'onde des oscillations doit, dans le mode fondamental, vérifier:

$$l = \frac{\lambda}{2} \text{ o } \lambda = \frac{c}{\nu_0}$$

qui mène bien sûr au même résultat.

Les expressions demandées s'écrivent enfin:

$$x(z, t) = x_0 \sin\left(p \frac{z}{l}\right) e^{-2ipv_0 t} \quad y(z, t) = y_0 \sin\left(p \frac{z}{l}\right) e^{-2ipv_0 t}$$

où on passera aux parties réelles avant toute interprétation physique.

2.b. Calculons d'abord la masse linéique du fil:

$$m = \rho_0 p \frac{d^2}{4} = 4,4210^{-9} \text{ kg.m}^{-1}$$

puis la tension demandée:

$$T_0 = mc^2 = 4l^2 v_0^2 m = 1,110^{-5} \text{ N}$$

Cette valeur semble faible mais il faut la comparer au poids du fil:

$$mg = lmg = 2,210^{-9} \text{ N}$$

3.a. Il suffit de prendre en compte la force supplémentaire:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = T_0 \frac{d^2 \vec{r}}{dz^2} + \rho G e_z \dot{U} \frac{d \vec{r}}{dt}$$

après simplification par la longueur de l'élément étudié Δz .

3.b. Dans un référentiel tournant, il faut ajouter les forces d'inertie, obtenues par les lois de composition des vitesses:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{\Omega} \dot{U} \vec{r}$$

et des accélérations:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\Omega} \dot{U} \vec{u}' - \vec{\Omega}^2 \vec{r}$$

où on a utilisé le fait que $\vec{r}$ représente la seule partie radiale du vecteur position du point étudié; le composante longitudinale s'annule d'ailleurs dans les différents produits vectoriels.

On en déduit enfin:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = T_0 \frac{d^2 \vec{r}}{dz^2} + \rho G e_z \dot{U} \left(\vec{u}' + \vec{\Omega} \dot{U} \vec{r} \right) - 2m \vec{\Omega} \dot{U} \vec{u}' + m \Omega^2 \vec{r}$$

3.c. Il suffit de choisir:

$$\vec{\Omega} = \frac{\rho G}{2m} e_z$$

pour obtenir l'équation simplifiée:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = T_0 \frac{d^2 \vec{r}}{dz^2} + \rho G \left[\vec{\Omega} (\vec{r} \cdot e_z) - \vec{r} \Omega \right] + m \Omega^2 \vec{r}$$

soit encore:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = T_0 \frac{d^2 \vec{r}}{dz^2} - m \Omega^2 \vec{r}$$

3.d. Le terme demandé est négligeable si:

$$\|m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}\| \gg \|m \Omega^2 \vec{r}\|$$

or à la fréquence d'oscillation v_0 on peut écrire:

$$\|m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}\| = m (2pv_0)^2 \|\vec{r}\|$$

On en conclut immédiatement qu'il suffit que $\Omega \ll 2\pi v_0$; le mouvement du fil dans ce référentiel tournant est alors régi par la même équation qu'en 1.b. et on retrouve des oscillations de mode fondamental à la pulsation v_0 .

4. L'expression de Ω est:

$$\Omega = \frac{\rho h}{2mm} = 1,7010^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

Dans l'expression négligée, les pulsations sont au carré et on vérifie assez bien:

$$\left(\frac{\Omega}{2pv_0}\right)^2 = 7,310^{-2} \ll 1$$

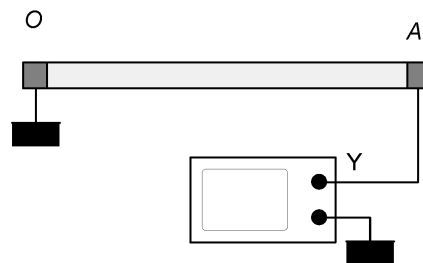
Troisième Partie

1. Le champ électromoteur qui apparaît le long du fil vibrant se met sous la forme:

$$\vec{E}_m = u \vec{\nabla} B_0 = - \frac{\partial y}{\partial t} B_0 \vec{e}_z$$

dont la circulation le long du fil fournit la tension demandée:

$$e = V(A) - V(O) = - B_0 \int \frac{\partial y}{\partial t} dz$$



2.a. On aura d'abord excitation seulement dans la direction y par la seule force de Laplace:

$$d\vec{f} = idz \{ \vec{e}_z \vec{\nabla} B_0 \vec{e}_x = idz B_0 \vec{e}_y$$

et c'est donc dans cette direction qu'on observera l'oscillation:

$$y(z, t) = e \sin\left(p \frac{z}{l}\right) \cos(2pv_0 t)$$

moennant un choix arbitraire de l'origine des temps.

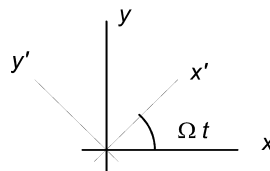
On en déduit par intégration immédiate:

$$e(t) = - 4pv_0 e B_0 \sin(2pv_0 t)$$

La tension de crête a pour valeur:

$$e_{\max} = 4pv_0 e B_0 = 4,24 \text{ mV}$$

2.b. Le mouvement du fil est une oscillation de mde fondamental dans le référentiel tournant; on passe de ce référentiel au référentiel du laboratoire par le schéma ci-dessous:



Si l'instant 0 choisi est celui de l'excitation, on aura dans le référentiel tournant:

$$y'(z, t) = e \sin\left(p \frac{z}{l}\right) \cos(2pv_0 t) \text{ et } x' = 0$$

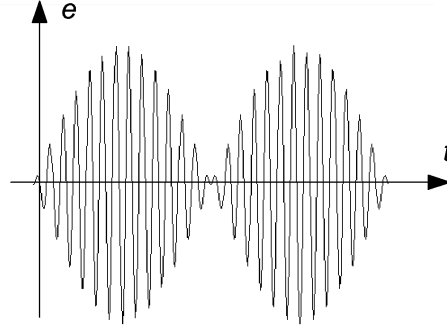
donc dans le référentiel du laboratoire:

$$\} \text{ o } \Omega = \frac{\rho G}{2m}$$

d'où enfin par intégration la forme de la tension mesurée:

$$e(t) = -4pv_0 e B_0 \sin(2pv_0 t) \cos(\Omega t)$$

Comme on a déjà eu l'occasion de le faire remarquer, Ω est une pulsation plus faible que $2\pi v_0$ et il s'agit donc d'un signal sinusoïdal de fréquence v_0 enveloppé par une variation plus lente de sa valeur de crête, à la pulsation Ω , qu'on mesure ainsi directement à l'oscilloscope.



3. On obtient ainsi une excitation sur les deux axes avec des amplitudes différentes:

$$y'(z, t) = e_0 \sin\left(p \frac{z}{l}\right) \cos(2pv_0 t) \quad x'(z, t) = e_1 \sin\left(p \frac{z}{l}\right) \cos(2pv_0 t)$$

d'où une amplitude de vibration selon l'axe y du référentiel du laboratoire donnée par:

$$y = y' \cos \Omega t + x' \sin \Omega t$$

qui s'écrit donc:

$$y(z, t) = \sin\left(p \frac{z}{l}\right) \cos(2pv_0 t) [e_0 \cos(\Omega t) + e_1 \sin(\Omega t)]$$

La mesure de e est celle d'une tension de la forme:

$$e(t) = -4B_0 v_0 \leq \cos(2pv_0 t) [e_0 \cos(\Omega t) + e_1 \sin(\Omega t)]$$

Si les signes respectifs de B_0 et ϵ_0 étaient forcement corrélés, il n'en va pas de même de ceux de B_0 et ϵ_1 qui peuvent être réglés séparément. L'observation de la modification de la forme de l'enveloppe des signaux lorsqu'on augmente ou diminue B_1 fournit le signe de Ω , donc celui de Γ .

