

**Тема: Розв'язування логарифмічних рівнянь. Розв'язування
логарифмічних нерівностей**

Посилання на підручник:
<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf>

Матеріали до теми:

В основному, усі логарифмічні рівняння, які ми будемо розв'язувати, зводяться до розв'язування найпростіших рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\log_3 (2x + 1) = 2$.

Розв'язання

За означенням логарифма маємо

$$2x + 1 = 3^2, 2x = 8, x = 4.$$

Перевірка: $\log_3 (2 \cdot 4 + 1) = \log_3 9 = 2$.

Відповідь: 4.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\log_3 x = \log_3 (6 - x^2)$.

Розв'язання

Із рівності логарифмів чисел випливає

$$x = 6 - x^2; x^2 + x - 6 = 0; x_1 = -3; x_2 = 2.$$

Перевірка:

1) число - 3 не є коренем даного рівняння, бо вираз $\log_3 (-3)$ — не визначений;

$$2) \log_3 x = \log_3 2; \log_3 (6 - x^2) = \log_3 (6 - 2^2) = \log_3 2.$$

Відповідь: 2.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\log_{x+1} (2x^2 + 1) = 2$.

Розв'язання

За означенням логарифма маємо

$$2x^2 + 1 = (x + 1)^2; 2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1; x^2 - 2x = 0; x_1 = 0; x_2 = 2.$$

Перевірка:

1) значення $x = 0$ не є коренем даного рівняння, оскільки основа логарифма $x + 1$ не повинна дорівнювати 1;

$$2) \log_{2+1}(2 \cdot 2^2 + 1) = \log_3 9 = 2.$$

Відповідь: 2.

Зазначимо, що в прикладах використовуються тільки такі перетворення, які не призводять до втрати коренів, але можуть привести до одержання сторонніх коренів. Тому перевірка кожного з одержаних коренів обов'язкова, якщо немає впевненості у рівносильності рівнянь.

Основні методи розв'язування логарифмічних рівнянь

1. Метод зведення логарифмічного рівняння до алгебраїчного.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\log^2_2 x - 3 \log_2 x = 4$.

Розв'язання

Позначимо $\log_2 x$ через y . Дане рівняння набуває вигляду:

$$y^2 - 3y = 4; y^2 - 3y - 4 = 0; y_1 = 4; y_2 = -1.$$

$$\text{Звідси } \log_2 x = 4, \log_2 x = -1; x = 2^4, x = 2^{-1}; x = 16, x = \frac{1}{2}.$$

Перевірка:

$$1) \log^2_2 16 - 3 \log_2 16 = 16 - 12 = 4;$$

$$2) \log^2_2 \frac{1}{2} - 3 \log_2 \frac{1}{2} = 1 + 3 = 4.$$

Відповідь: 16, $\frac{1}{2}$.

2. Метод потенціювання.

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $\log_5 (x - 1) + \log_5 (x - 2) = \log_5 (x + 2)$.

Розв'язання

Пропотенціюємо дану рівність і одержимо:

$$\log_5 ((x - 1)(x - 2)) = \log_5 (x + 2); (x - 1)(x - 2) = x + 2;$$

$$x^2 - 2x - x + 2 = x + 2; x^2 - 4x = 0; x(x - 4) = 0;$$

$$x = 0 \text{ або } x = 4.$$

Перевірка:

1) значення $x = 0$ не є коренем рівняння, тому що вирази $\log_5 (x - 1)$ і $\log_5 (x - 2)$ не мають змісту при $x = 0$;

$$2) \log_5(x - 1) + \log_5(x - 2) = \log_5(4 - 1) + \log_5(4 - 2) = \log_5 3 + \log_5 2 \\ = \log_5 (2 \cdot 3) = \log_5 6.$$

Отже, $x = 4$ — корінь.

Відповідь: 4.

3. Метод зведення логарифмів до однієї основи.

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3$. $\log_3 x - 2^{\log_{\frac{1}{3}} x}$

Розв'язання

$$\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3; \log_3 x - 2 \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = 3; \log_3 x - 2 \cdot \frac{\log_3 x}{-1} = 3;$$

$$\log_3 x + 2\log_3 x = 3; 3\log_3 x = 3; \log_3 x = 1; x = 3.$$

Перевірка: $\log_3 3 - 2\log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + 2 = 3$. Отже, $x = 3$ — корінь.

Відповідь: 3.

4. Метод логарифмування.

Приклад 7. Розв'яжіть рівняння $x^{\lg x} = 100x$.

Розв'язання

Прологарифмуємо обидві частини рівності ($x > 0$) і одержимо

$$\lg x^{\lg x} = \lg (100x); \lg x \lg x = \lg 100 + \lg x; \lg^2 x - \lg x - 2 = 0.$$

Замінімо $\lg x = y$. Рівняння набуває вигляду:

$$y^2 - y - 2 = 0; y_1 = 2; y_2 = -1.$$

Тоді: 1) $\lg x = 2; x = 10^2; x = 100$.

2) $\lg x = -1; x = 10^{-1} = 0,1$.

Перевірка:

1) $x^{\lg x} = 100^{\lg 100} = 100^2; 100x = 100 \cdot 100 = 100^2$. Отже, $x = 100$ — корінь;

2) $x^{\lg x} = 0,1^{\lg 0,1} = 0,1^{-1} = \frac{1}{0,1} = 10; 100x = 100 \cdot 0,1 = 10$. Отже, $x = 0,1$

— корінь.

Відповідь: 100; 0,1.

5. Графічний метод розв'язування логарифмічних рівнянь.

Приклад 8. Розв'яжіть рівняння $\lg x = 1 - x$ графічно.

Розв'язання

В одній і тій самій системі координат побудуємо графіки функції $y = \lg x$ і $y = 1 - x$ (рис. 3). Абсциса точки перетину побудованих графіків дорівнює 1. Отже, $x = 1$ — корінь даного рівняння.

Відповідь: 1.

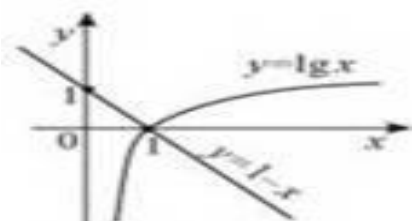


Рис. 3

Зауваження. Корінь цього рівняння легко знайти усно, однак треба пам'ятати, що в цьому випадку необхідно доводити той факт, що знайдений корінь єдиний.

Логарифмічні нерівності

	$x \leq b$ $a > 0, a \neq 1$	$x \geq b$ $a > 0, a \neq 1$
Якщо $0 < a < 1$	$x \geq a^b$	$0 < x \leq a^b$
Якщо $a > 1$	$0 < x \leq a^b$	$x \geq a^b$

Методи розв'язування логарифмічних нерівностей

$$1) f(x) \geq g(x)$$

Якщо $0 < a < 1$, то

$$\begin{aligned} \{f(x) > 0 \mid g(x) > 0 \mid f(x) \leq g(x)\} & \text{ або} \\ \{f(x) > 0 \mid f(x) \leq g(x)\} \end{aligned}$$

Якщо $a > 1$, то

$$\begin{aligned} \{f(x) > 0 \mid g(x) > 0 \mid f(x) \geq g(x)\} & \text{ або} \\ \{g(x) > 0 \mid f(x) \geq g(x)\} \end{aligned}$$

$$2) \text{ а) } f(x) + g(x) \geq c \qquad \text{б) } f(x) - g(x) \geq c$$

$$\{f(x) > 0 \mid g(x) > 0 \mid f(x) \geq c \mid g(x) \geq c\}$$

$$\{\log_a \frac{f(x)}{g(x)} \geq c \mid f(x) > 0 \mid g(x) > 0\}$$

3) Метод введення нової змінної

$$af(x) + bf(x) + c \geq 0 \qquad \text{О.Д.З.: } f(x) > 0$$

$$1) f(x) = t$$

$$at^2 + bt + c \geq 0$$

2) Врахування заміни

ОСНОВНІ ТИПИ ЛОГАРИФМІЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

ТИП НЕРІВНОСТЕЙ	СПОСІБ РОЗВ'ЯЗАННЯ
1. $\log_a x > \log_a y$	$x > y$ (якщо $a > 1$), $x < y$ (якщо $0 < a < 1$)
2. $\log_a x > c$	$\log_a x > c \cdot 1 \rightarrow \log_a x > c \cdot \log_a a \rightarrow \log_a x > \log_a a^c \rightarrow$ перехід до нерівності 1.
3. $m \log_a^2 x + b \log_a x + c < (>) 0$	заміна $\log_a x = t$, перехід до квадратичної нерівності
4. $x^{\log_a x + m} > c$	логарифмування: $\log_a x^{\log_a x + m} > \log_a c \rightarrow (\log_a x + m) \log_a x > \log_a c$ (якщо $a > 1$) $\log_a x^{\log_a x + m} < \log_a c \rightarrow (\log_a x + m) \log_a x < \log_a c$ (якщо $0 < a < 1$) перехід до нерівності 3.

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал п. 6, 7.
2. Законспектувати означення, властивості.
3. Виконати письмово вправи: 6.5, 6.7, 7.1-7.3.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net, у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net.