Тема: Розв’язування логарифмічних рівнянь. Розв’язування логарифмічних нерівностей

Посилання на підручник: https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf

Матеріали до теми:

В основному, усі логарифмічні рівняння, які ми будемо розв’язувати, зводяться до розв’язування найпростіших рівнянь.

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння $\log_3 (2x + 1) = 2$.

Розв'язання

За означенням логарифма маємо

$2x + 1 = 3^2$, $2x = 8$, $x = 4$.

Перевірка: $\log_3 (2 \cdot 4 + 1) = \log_3 9 = 2$.

Відповідь: 4.

Приклад 2. Розв’яжіть рівняння $\log_3 x = \log_3 (6 - x^2)$.

Розв'язання

Із рівності логарифмів чисел випливає

$x = 6 - x^2$; $x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = -3$; $x_2 = 2$.

Перевірка:

1) число - 3 не є коренем даного рівняння, бо вираз log3 (- 3) — не визначений;

2) $\log_3 x = \log_3 2$; $\log_3(6 - x^2) = \log_3(6 - 2^2) = \log_3 2$.

Відповідь: 2.

Приклад 3. Розв’яжіть рівняння $\log_{x+1} (2x^2 + 1) = 2$.

Розв'язання

За означенням логарифма маємо

$2x^2 + 1 = (x + 1)^2$; $2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$; $x^2 - 2x = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

Перевірка:

1) значення x = 0 не є коренем даного рівняння, оскільки основа логарифма x + 1 не повинна дорівнювати 1;

2) $log_{2+1}(2 \cdot 2^2 + 1) = log_3 9 = 2.$

Відповідь: 2.

Зазначимо, що в прикладах використовуються тільки такі перетворення, які не призводять до втрати коренів, але можуть привести до одержання сторонніх коренів. Тому перевірка кожного з одержаних коренів обов'язкова, якщо немає впевненості у рівносильності рівнянь.

Основні методи розв'язування логарифмічних рівнянь

1. Метод зведення логарифмічного рівняння до алгебраїчного.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $log^2_2 x - 3 log_2 x = 4.$

Розв'язання

Позначимо log_2 x через y. Дане рівняння набуває вигляду:

$y^2 - 3y = 4; y^2 - 3y - 4 = 0; y_1 = 4; y_2 = -1.$

Звідси $log_2 x = 4, log_2 x = -1; x = 2^4, x = 2^{-1}; x = 16, x = \frac{1}{2}.$

Перевірка:

1) $log^2_2 16 - 3 log_2 16 = 16 - 12 = 4;$

2) $log^2_2 \frac{1}{2} - 3 log_2 \frac{1}{2} = 1 + 3 = 4.$

Відповідь: 16, $\frac{1}{2}$.

2. Метод потенціювання.

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $log_5 (x - 1) + log_5 (x - 2) = log_5 (x + 2).$

Розв'язання

Пропотенціюємо дану рівність і одержимо:

$log_5 ((x - 1)(x - 2)) = log_5 (x + 2); (x - 1)(x - 2) = x + 2;$

$x^2 - 2x - x + 2 = x + 2; x^2 - 4x = 0; x(x - 4) = 0;$

$x = 0$ *або* $x = 4.$

Перевірка:

1) значення x = 0 не є коренем рівняння, тому що вирази $\log_5 (x - 1)$ і $\log_5 (x - 2)$ не мають змісту при x = 0;

2) $\log_5(x - 1) + \log_5(x - 2) = \log_5(4 - 1) + \log_5(4 - 2) = \log_5 3 + \log_5 2 = \log_5 (2 \cdot 3) = \log_5 6$.

Отже, x = 4 — корінь.

Відповідь: 4.

3. Метод зведення логарифмів до однієї основи.

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння $log_3 x - 2log_{\frac{1}{3}} x = 3.log_3 x - 2^{log_{\frac{1}{3}} x}$

Розв'язання

$log_3 x - 2log_{\frac{1}{3}} x = 3;\ log_3 x - 2\frac{log_3 x}{log_3 \frac{1}{3}} = 3; log_3 x - 2 \cdot \frac{log_3 x}{-1} = 3;$

$log_3 x + 2log_3 x = 3;\ 3log_3 x = 3;\ log_3 x = 1;\ x = 3.$

Перевірка: $log_3 3 - 2log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + 2 = 3$. Отже, $x = 3$ — корінь.

Відповідь: 3.

4. Метод логарифмування.

Приклад 7. Розв'яжіть рівняння $x^{lgx} = 100x$.

Розв'язання

Прологарифмуємо обидві частини рівності $(x > 0)$ і одержимо

$lg\, x^{lgx} = lg\,(100x);\ lg\, x\, lg\, x = lg\, 100 + lg\, x;\ lg^2 x - lg\, x - 2 = 0.$

Замінимо lg x = y. Рівняння набуває вигляду:

$y^2 - y - 2 = 0;\ y_1 = 2;\ y_2 = -1.$

Тоді: 1) $lgx = 2;\ x = 10^2;\ x = 100.$

2) $lgx = -1;\ x = 10^{-1} = 0,1.$

Перевірка:

1) $x^{lgx} = 100^{lg100} = 100^2;\ 100x = 100 \cdot 100 = 100^2$. *Отже,* $x = 100$ — корінь;

2) $x^{lgx} = 0,1^{lg0,1} = 0,1^{-1} = \frac{1}{0,1} 1 = 10;\ 100x = 100 \cdot 0,1 = 10$. Отже, x = 0,1 — корінь.

Відповідь: 100; 0,1.

5. Графічний метод розв’язування логарифмічних рівнянь.

Приклад 8. Розв’яжіть рівняння *lgx = 1 - x* графічно.

Розв'язання

В одній і тій самій системі координат побудуємо графіки функції *y= lgx і y = 1- x* (рис. 3). Абсциса точки перетину побудованих графіків дорівнює 1. Отже, *x = 1* — корінь даного рівняння.

Відповідь: 1.

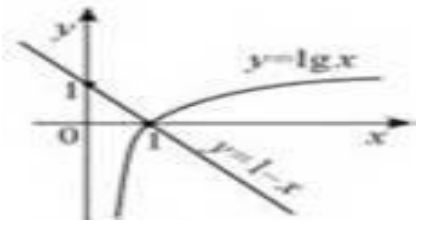

Рис. 3

Зауваження. Корінь цього рівняння легко знайти усно, однак треба пам’ятати, що в цьому випадку необхідно доводити той факт, що знайдений корінь єдиний.

Логарифмічні нерівності

	$x \leq b$ $a > 0, a \neq 1$	$x \geq b$ $a > 0, a \neq 1$
Якщо $0 < a < 1$	$x \geq a^b$	$0 < x \leq a^b$
Якщо $a > 1$	$0 < x \leq a^b$	$x \geq a^b$

Методи розв’язування логарифмічних нерівностей

$$1)\ f(x) \geq g(x)$$

Якщо $0 < a < 1$, то

$\{f(x) > 0\ g(x) > 0\ f(x) \leq g(x)$ або
$\{f(x) > 0\ f(x) \leq g(x)$

Якщо $a > 1$, то

$\{f(x) > 0\ g(x) > 0\ f(x) \geq g(x)$ або
$\{g(x) > 0\ f(x) \geq g(x)$

2) а) $f(x) + g(x) \gtrless c$ б) $f(x) - g(x) \gtrless c$

$\{f(x) \times g(x) \gtrless c\ f(x) > 0\ g(x) > 0$
$\{log_a \frac{f(x)}{g(x)} \gtrless c\ f(x) > 0\ g(x) > 0$

3) Метод введення нової змінної

$af(x) + b\,f(x) + c \gtrless 0$ О.Д.З.: $f(x) > 0$

1) $f(x) = t$

$$at^2 + bt + c \gtrless 0$$

2) Врахування заміни

ОСНОВНІ ТИПИ ЛОГАРИФМІЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

ТИП НЕРІВНОСТЕЙ	СПОСІБ РОЗВ»ЯЗАННЯ
1. $\log_a x > \log_a y$	$x>y$ (якщо $a>1$), $x<y$ (якщо $0<a<1$)
2. $\log_a x>c$	$\log_a x>c\cdot 1 \rightarrow \log_a x>c\cdot \log_a a \rightarrow$ $\log_a x>\log_a a^c \rightarrow$ перехід до нерівності 1.
3. $m\log_a^2 x + b\log_a x + c < (>) 0$	заміна $\log_a x = t$, перехід до квадратичної нерівності
4. $x^{\log_a x+m} > c$	логарифмуваня: $\log_a x^{\log_a x+m} > \log_a c \rightarrow (\log_a x+m)\log_a x > \log_a c$ (якщо $a>1$) $\log_a x^{\log_a x+m} < \log_a c \rightarrow (\log_a x+m)\log_a x < \log_a c$ (якщо $0<a<1$) перехід до нерівності 3.

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал п. 6, 7.
2. Законспектувати означення, властивості.
3. Виконати письмово вправи: 6.5, 6.7, 7.1-7.3.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .