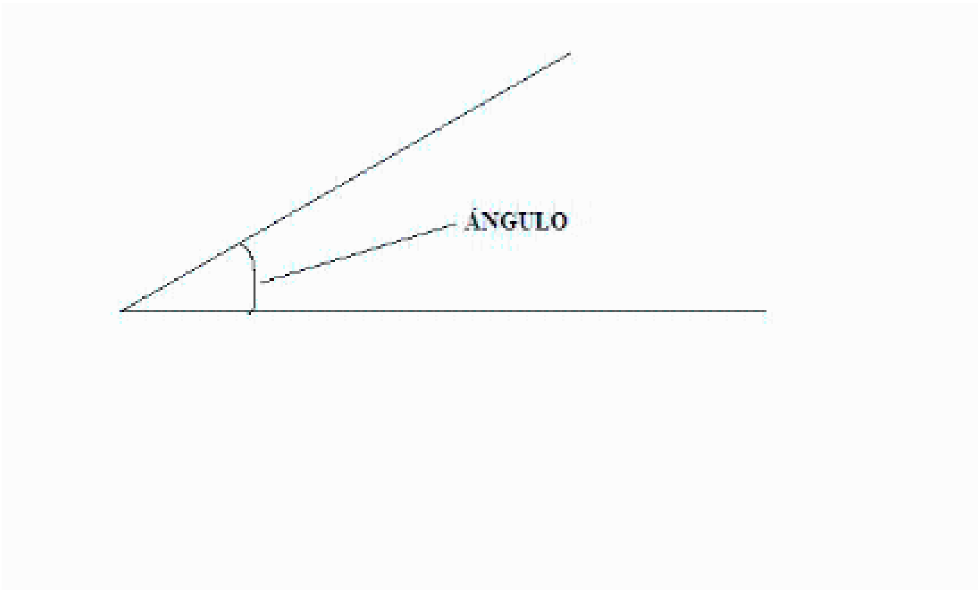
ANGULOS

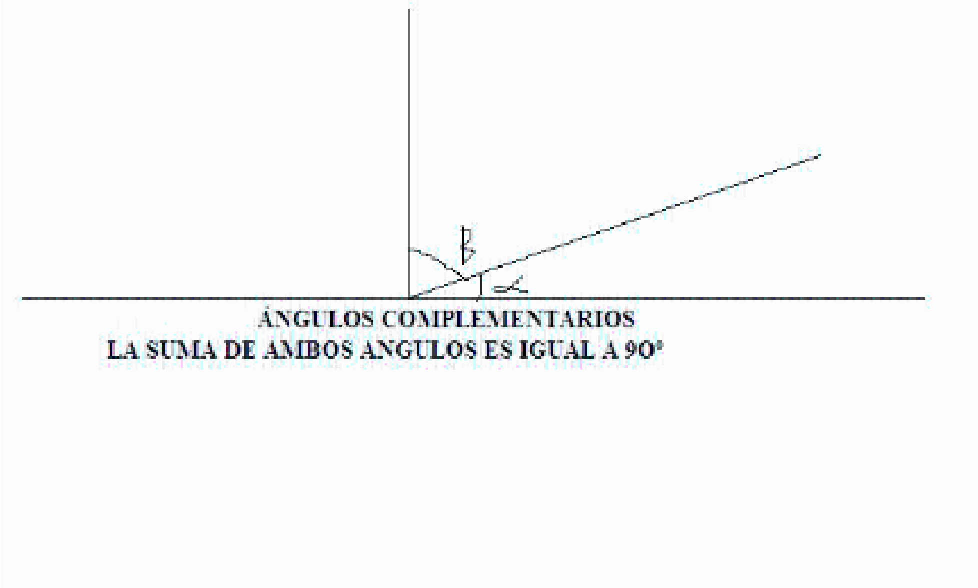
En esta guía vamos a dar unas nociones básicas sobre los ángulos así como ejemplo de aplicaciones de dichos conceptos en la resolución de ejercicios, al final de esta guía se proponen unos ejercicios para practicar los conocimientos desarrollados al respecto.

Ángulo. Un ángulo es la parte del plano comprendida por dos semirrectas que se cortan en un punto en común denominado vértice como lo muestra la siguiente figura.



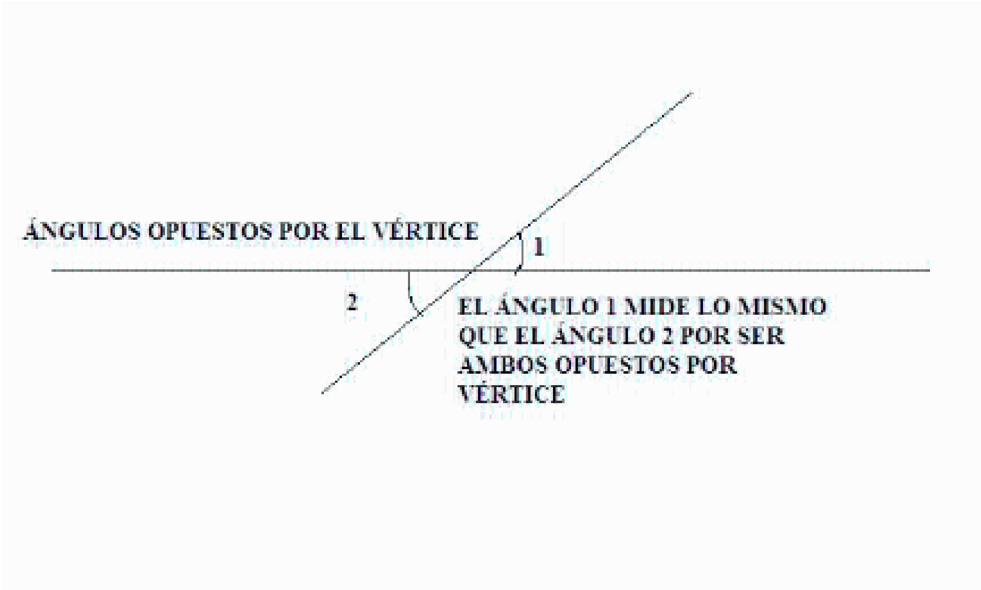
Así mismo se presentan distintos tipos de ángulos entre los cuales mencionaremos los siguientes.

Ángulos complementarios: dos ángulos son complementarios cuando su suma da 90º, es decir, dos ángulos complementarios forman un ángulo recto como se puede ver en la siguiente figura

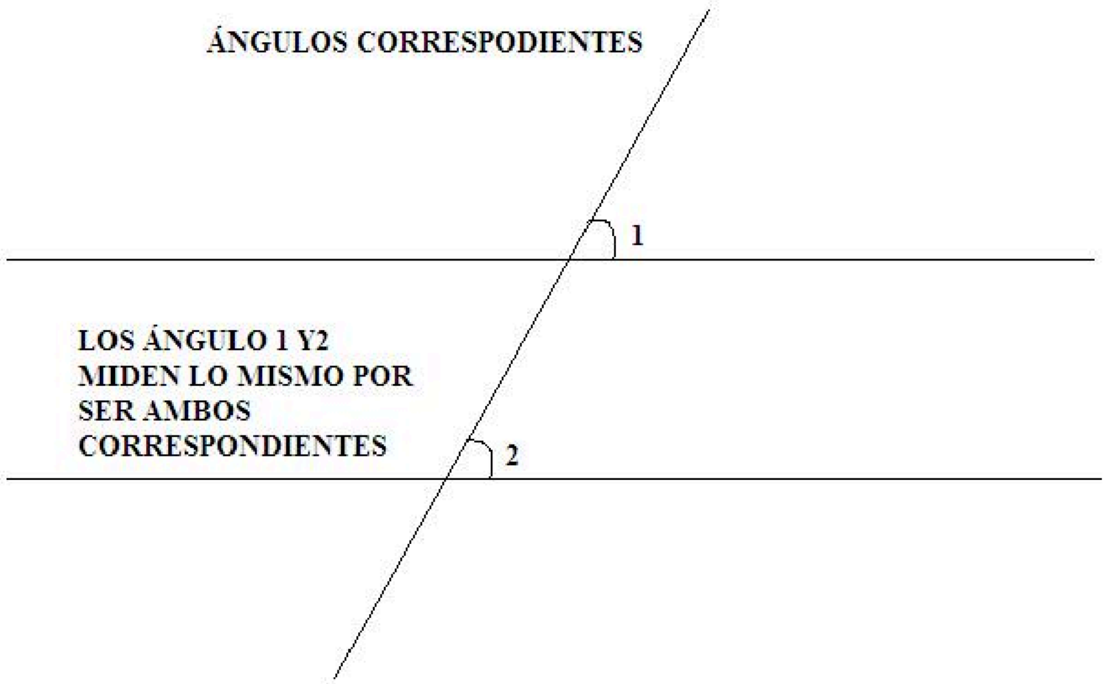


Ángulos suplementarios: dos ángulos son suplementarios cuando su suma da 180º, es decir, ambos ángulos forman un ángulo llano como se muestra en la siguiente figura

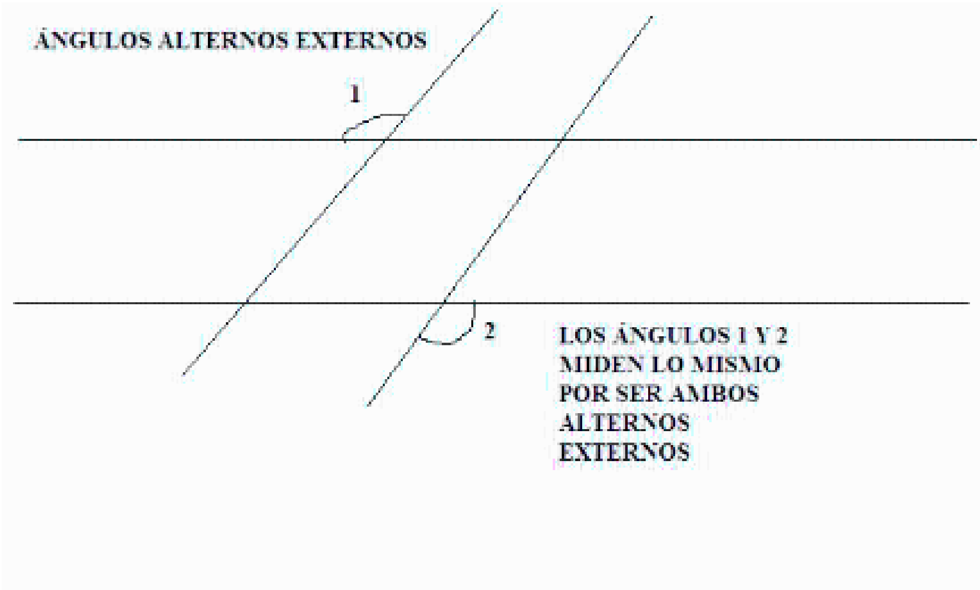
Ángulos opuestos por el vértice: son ángulos que definidos por dos rectas secantes que se cortan y que generan ángulos iguales en dicho punto de intercepción como muestra en la figura



Ángulos correspondientes: dos ángulos son correspondientes cuando tienen la misma orientación y la misma medida, es decir, que dichos ángulos son iguales o congruentes.

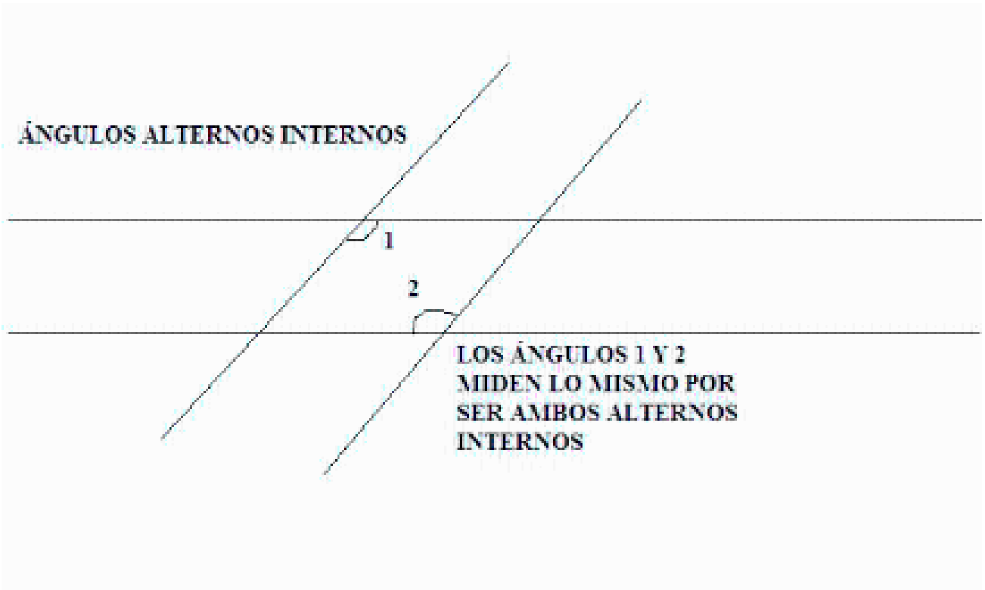


Ángulos alternos externos: Para entender este concepto veamos primero la figura siguiente



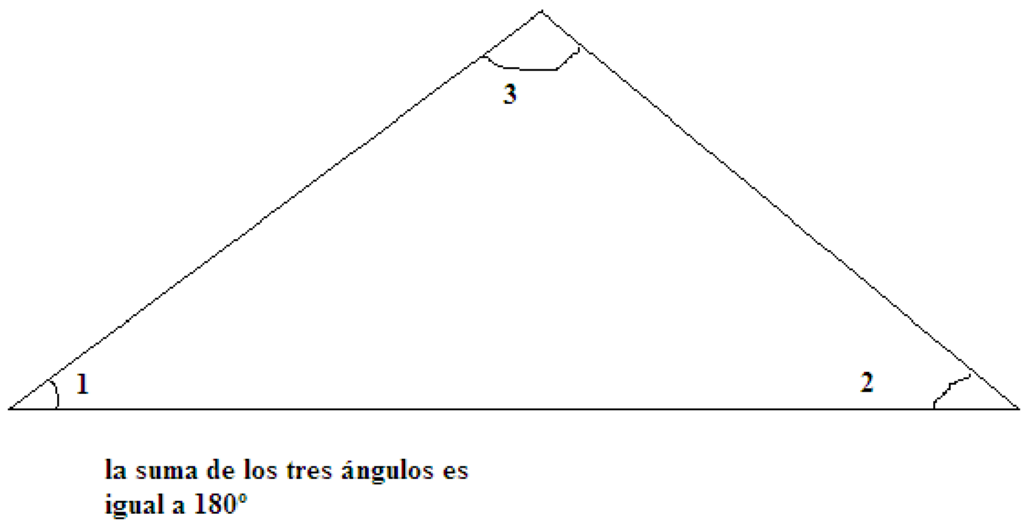
Como se verá los ángulos se les llama externos porque están fuera o en la parte externa conformadas por las rectas paralelas que se cruzan y son llamados alternos pues un ángulo aparece a la izquierda en la parte superior y el otro aparece a la derecha en la parte inferior.

Ángulos alternos internos: Para entender este concepto veamos la siguiente figura

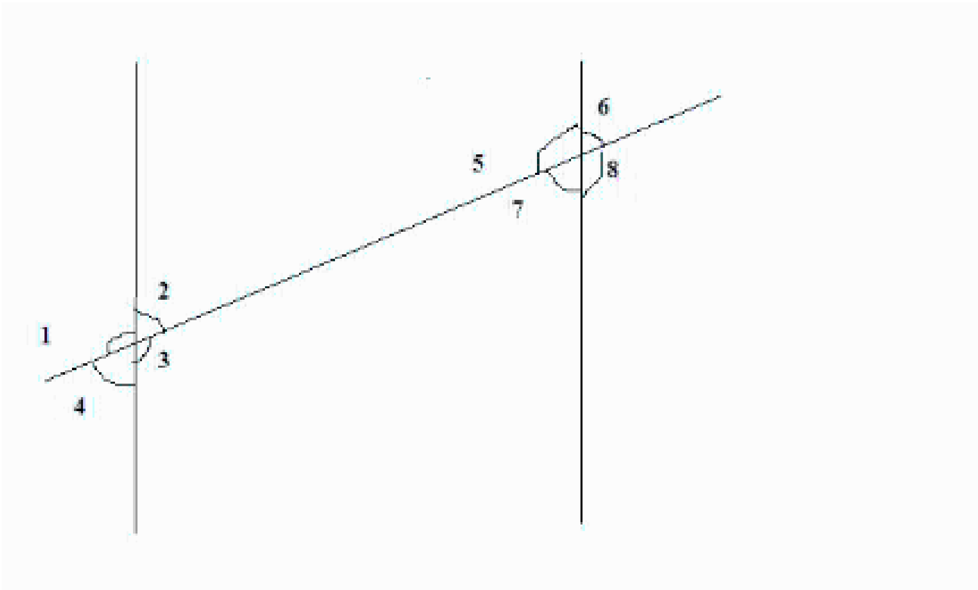


En la figura se observa que los ángulos están contenidos en la parte interna determinada por los cruces o intersecciones de las rectas paralelas por eso se les llaman internos, también se observa que uno de los ángulos para a la derecha en la parte superior mientras que el otro aparece a la izquierda en la parte inferior por eso se les llama alternos.

Por último hay que recordar que las sumas de los ángulos internos de un triángulo cualquiera siempre será igual a 180º, veamos ahora unos ejercicios en donde aplicarán estos conceptos



Ejemplo 1



en la figura dada se proporciona como dato ∢1=105º hallar los demás ángulos. Observemos que ∢1 y ∢2 son suplementarios luego utilizamos esa propiedad para hallar el ángulo ∢2.

Así $\measuredangle 1 + \measuredangle 2 = 180^\circ$ entonces $\measuredangle 2 = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$

Ahora se observa también los ángulos ∢1 y ∢3 son opuestos por el vértice por lo tanto $\measuredangle 1 = \measuredangle 3 = 105^\circ$

De igual forma los ángulos ∢2 y ∢4 son opuestos por el vértice por lo tanto $\measuredangle 2 = \measuredangle 4 = 75^\circ$

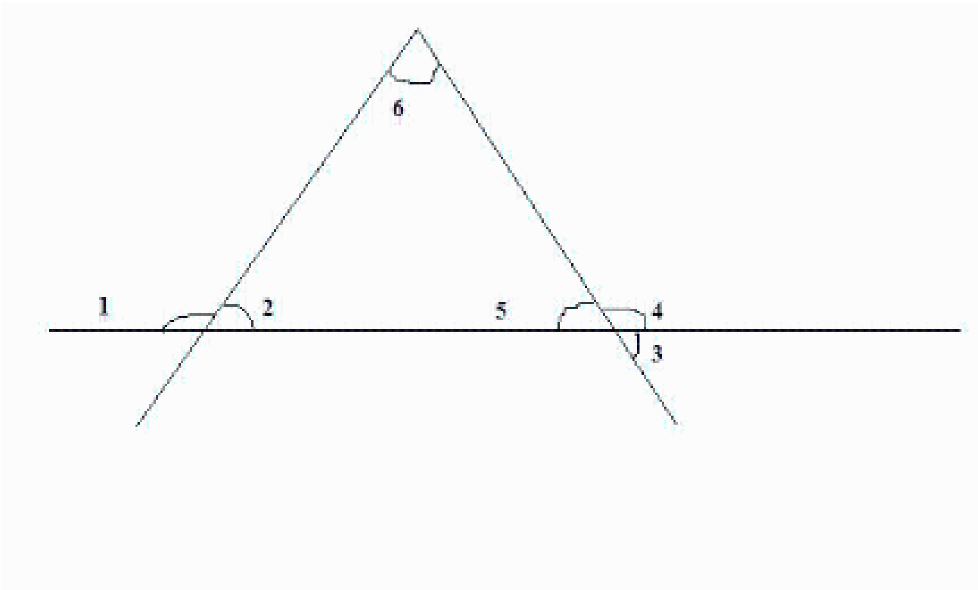
También se pueden observar que ángulo ∢1 y el ángulo ∢5 son correspondientes por lo tanto $\measuredangle 1 = \measuredangle 5 = 105^\circ$

así mismo el ángulo ∢2 y el ángulo ∢6 son también correspondientes por lo tanto $\measuredangle 2 = \measuredangle 6 = 75^\circ$

por último el ángulo ∢5 y ∢8 son iguales por ser opuestos por el vértice al igual que los ángulos ∢6 y el ángulo ∢7

por lo tanto ∢5=∢8= 105º y ∢6=∢7=75º

Ejemplo 2

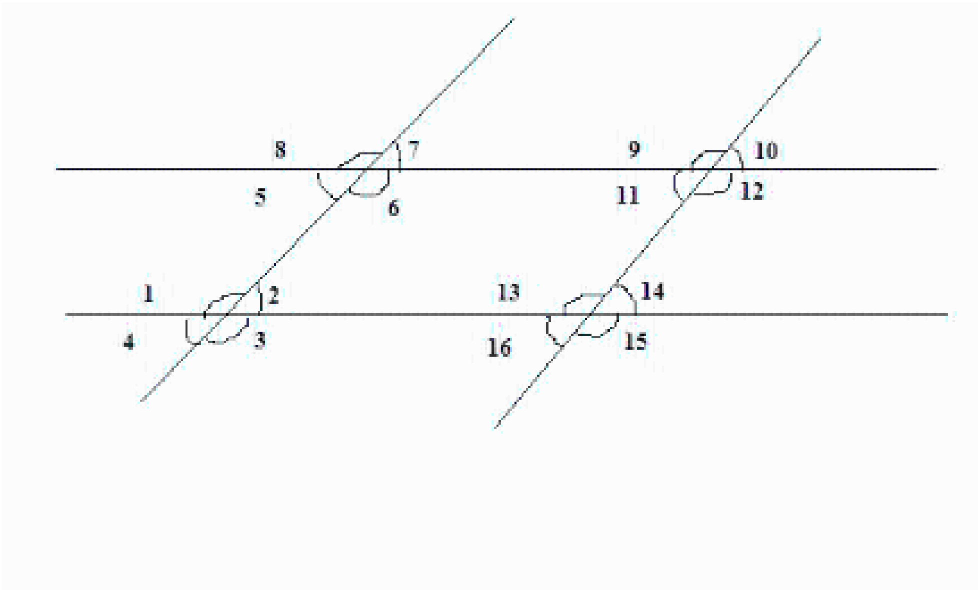


En la figura dada se proporcionan los datos $\measuredangle 1=110º$ y $\measuredangle 4=102º$ se pide hallar los demás ángulos.
Primero observemos que tanto los ángulos $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 2$ son suplementarios, entonces utilizando esa información podemos hallar el ángulo $\measuredangle 2$ como en el ejercicio anterior $\measuredangle 1+\measuredangle 2=180º \Rightarrow \measuredangle 2=180º-110º=70º$

Ahora con el siguiente dato $\measuredangle 4=102º$ podemos hallar el $\measuredangle 3$ por ser ambos también suplementarios, eso es $\measuredangle 4 + \measuredangle 3 = 180º$, entonces $\measuredangle 3= 180º - 102º = 78º$, luego como $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 5$ son opuesto por el vértice se tiene que $\measuredangle 3 = \measuredangle 5 = 78º$

Por último recordando que la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es igual a 180º procedemos a hallar el ángulo $\measuredangle 6$, es decir, $\measuredangle 2 + \measuredangle 5 + \measuredangle 6 = 180º \Rightarrow \measuredangle 6 = 180º- \measuredangle 2 - \measuredangle 5 \Rightarrow \measuredangle 6=180º - 70º - 78º \Rightarrow \measuredangle 6=180º - 148º = 32º$

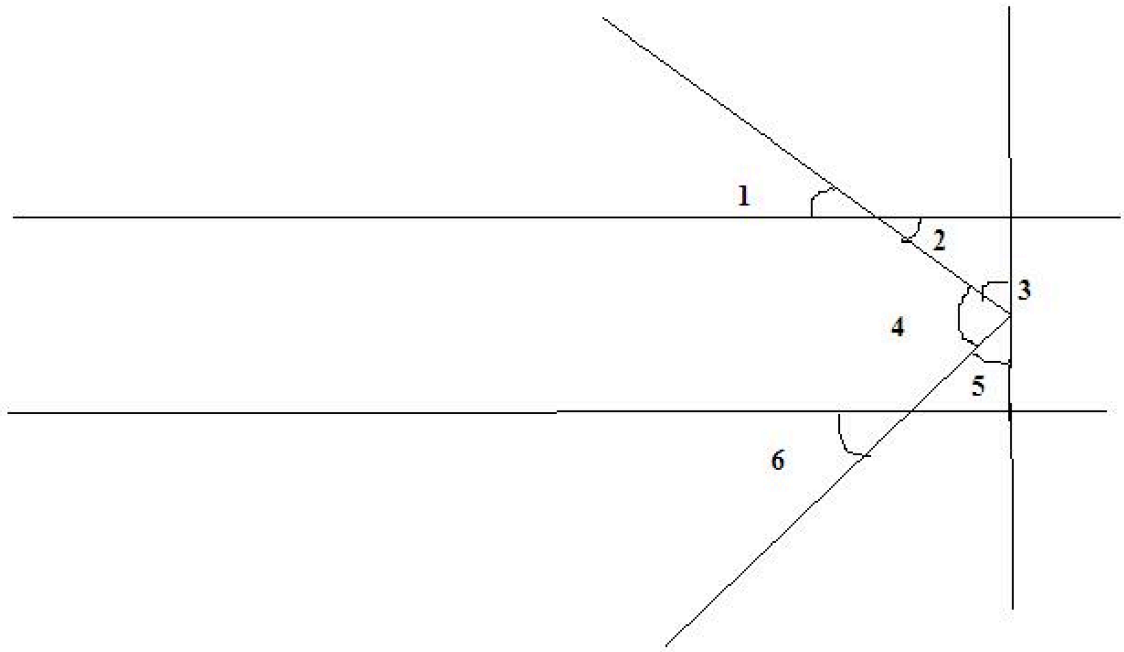
Ejemplo 3



En la figura se da como dato que el ángulo $\sphericalangle 1$ tiene como valor la medida igual a 118° se pide hallar los demás ángulos.
como el $\sphericalangle 1 = 118^\circ$ y además es suplementario con el ángulo $\sphericalangle 2$ pues se tiene que: $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle 2 = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$ luego como los ángulo $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 4$ y $\sphericalangle 2$ son opuestos por el vértice respectivamente entonces $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 = 118^\circ$ y $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4 = 62^\circ$.

ahora bien como se correspondencia entre los ángulos $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 8$ $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 7$ $\sphericalangle 4$ y $\sphericalangle 5$ $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 6$ pues se tiene que $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 8 = 118^\circ$, $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 7 = 62^\circ$, $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5 = 62^\circ$, $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6 = 118^\circ$
también podemos utilizar el criterio de que los ángulos $\sphericalangle 8$ y $\sphericalangle 15$ son alternos externos así como los ángulos $\sphericalangle 4$ y $\sphericalangle 10$ así como también podemos decir que los ángulos $\sphericalangle 6$ y $\sphericalangle 13$ son alternos internos así como también lo son los ángulos $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 11$ por lo tanto $\sphericalangle 8 = \sphericalangle 15 = 118^\circ$, $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 10 = 62^\circ$, $\sphericalangle 6 = \sphericalangle 13 = 118^\circ$, $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 11 = 62^\circ$
ahora bien los ángulos $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 14$ y $\sphericalangle 8$ y $\sphericalangle 9$ son correspondientes por lo tanto $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 14 = 62^\circ$ y $\sphericalangle 8 = \sphericalangle 9 = 118^\circ$
por último se tienen que los ángulos $\sphericalangle 9$ y $\sphericalangle 12$ y $\sphericalangle 14$ y $\sphericalangle 16$ son opuesto por el vértice por lo tanto $\sphericalangle 9 = \sphericalangle 12 = 118^\circ$ y $\sphericalangle 14 = \sphericalangle 16 = 62^\circ$

Ejemplo 4

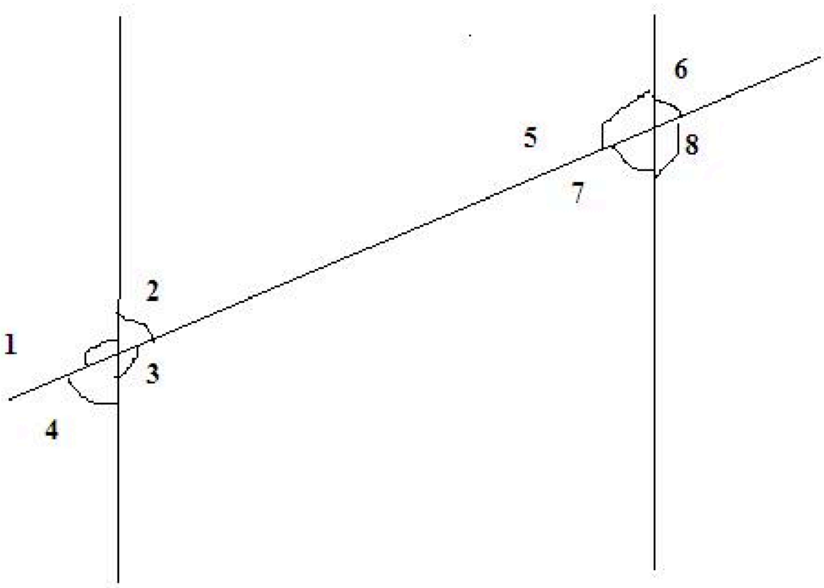


En el siguiente ejercicio se proporcionan los siguientes datos $\measuredangle 1=15^{o}$ y $\measuredangle 6 = 25^{o}$ Se pide hallar los demás ángulos
En este ejercicio se tiene que el ángulo $\measuredangle 1$ y el $\measuredangle 2$ son opuestos por el vértice por lo tanto $\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = 15^{o}$ ahora bien cómo el ángulo $\measuredangle 2$ es uno de los ángulos internos del triángulo rectángulo podemos hallar fácilmente el ángulo $\measuredangle 3$ pues la suma de los ángulos internos de triángulo cualquiera es igual a 180º
así se tiene que $\measuredangle 2 + 90^{o} + \measuredangle 3 = 180^{o} \Rightarrow \measuredangle 3 = 180^{o} - 90^{o} - 15^{o} \Rightarrow \measuredangle 3 = 180^{o} - 105^{o} = 75^{o}$
Como el ángulo $\measuredangle 6 = 25^{o}$ y es opuesto por el vértice con otro ángulo que si bien no aparece en la figura igual existe así que llamemos a ese ángulo: ángulo $\measuredangle 7$ así se tiene que $\measuredangle 6 = \measuredangle 7 = 25^{o}$ y aplicando la misma relación de los ángulos internos de un triángulo se tiene que $\measuredangle 7 + \measuredangle 5 + 90^{o} = 180^{o}$ luego $\measuredangle 5 = 180^{o} - 90^{o} - 25^{o} \Rightarrow \measuredangle 5 = 180^{o} - 115^{o} = 65^{o}$

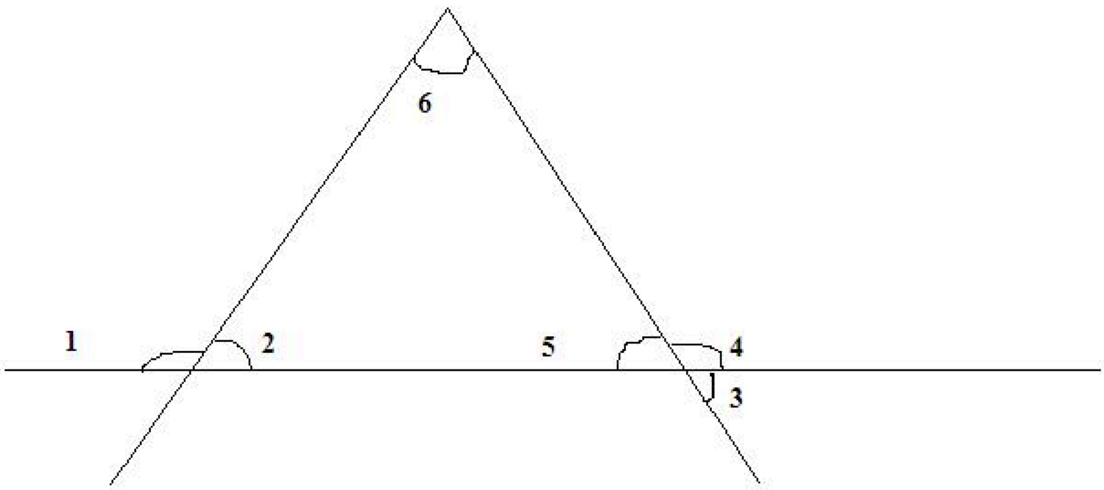
por último se observa que los ángulos $\measuredangle 5$, $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 3$ son suplementarios, es decir, $\measuredangle 5 + \measuredangle 4 + \measuredangle 3 = 180^{o}$ luego podemos hallar el ángulo $\measuredangle 4$ pues $\measuredangle 4 = 180^{o} - \measuredangle 5 - \measuredangle 3 \Rightarrow \measuredangle 4 = 180^{o} - 65^{o} - 75^{o} \Rightarrow \measuredangle 4 = 180^{o} - 140^{o} = 40^{o}$

Ejercicios propuestos

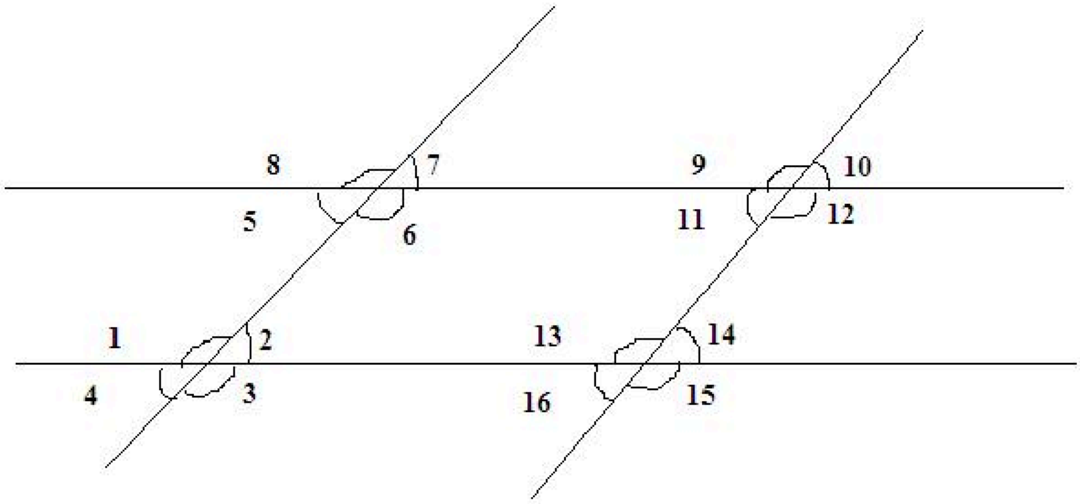
A.) En la siguiente figura se tiene que $\measuredangle 1 = 114^{o}$ Hallar los demás ángulos



B.) En la siguiente figura se tiene que ∢1= 117º y ∢4 = 106º Hallar los demás ángulos



C.) En la siguiente figura se tiene que ∢1= 113º hallar los demás ángulos



D.) En la siguiente figura se tiene que ∢1=10º y ∢6= 34º hallar los demás ángulos