

CORRECTION CENTRALE TSI 2007 : PHYSIQUE II

PARTIE I – Couplage magnétique de deux circuits

I.A D'après le théorème de Biot et Savart :

$$\vec{B}(O_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{i_1 d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO_1}}{PO_1^3} \quad \text{avec } d\vec{l} = dl \vec{u}_\theta \quad \text{et } \overrightarrow{PO_1} = -a_1 \vec{u}_r \quad \text{d'où} \quad \vec{B}(O_1) = \frac{\mu_0 N i_1}{2a_1} \vec{u}_z$$

I.B $\vec{B}(M)$ est un pseudovecteur : il est donc perpendiculaire au plan de symétrie contenant M, soit $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Donc $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z=0) \vec{u}_z$.

La distribution reste invariante lors d'une rotation de M autour de Oz donc $\vec{B}(M)$ ne dépend pas de θ (principe de Curie).

I.C Commentaires sur le profil : allure conforme avec le théorème de Biot et Savart où B devient infini lorsque PM tend vers zéro.

Relevé expérimental : B ne peut être infini ; il faut modifier le modèle théorique : lorsque M se rapproche, le conducteur ne peut plus être considéré comme filiforme. Il faut prendre le modèle volumique.

I.D Application numérique : $B_{10} = 9,67 \cdot 10^{-4} \text{ T}$

I.E $B_m = 1,56 B_{10} = 1,51 \cdot 10^{-3} \text{ T}$

Le rapport B_m/B_{10} reste fini et B_m est de l'ordre de grandeur de B_{10} .

Pour la bobine B_1 , on a $\Phi_1 = N \pi a_1^2 \cdot B_m = L_1 i_1$ d'où $L_1 = N \pi a_1^2 \cdot B_m / i_1$

Application numérique : $L_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ H}$. (risque de confusion sur l'intégrale pour Φ_1)

I.F Si l'intensité du courant dans le bobinage est multiplié par 2, alors B_{10} est également doublé car il est proportionnel à i_1 donc B_m est multiplié par 2.

Le flux a donc doublé. L_1 étant le rapport du flux à l'intensité reste constante.

I.G D'après le théorème de Biot et Savart ,

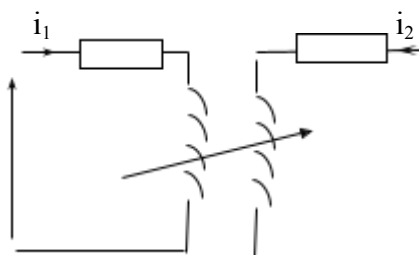
$$\vec{B}(O_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{i_1 d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO_2}}{PO_2^3} \quad \vec{B}(O_2) = B_{10} \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + d^2}} \right)^3 \vec{u}_z \quad \text{d'où} \dots$$

I.H Le champ magnétique sur B_2 étant considéré comme uniforme, on a :

$$\Phi = B_{10} \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + d^2}} \right)^3 \pi a_2^2 = M i_1 \quad \text{d'où} \quad M = \frac{\mu_0 \pi a_1^2 a_2^2 N}{2(a_1^2 + d^2)^{3/2}}$$

Application numérique : $M = 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ H}$ (erreur dans le texte d n'est pas $\gg$ à $a_1 \dots$)

I.I Equations couplées :



$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

En régime sinusoïdal forcé :

$$\underline{U}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\underline{I}_1 + jM\omega\underline{I}_2$$

$$0 = (R_2 + jL_2\omega)\underline{I}_2 + jM\omega\underline{I}_1$$

I.J On a $\underline{I}_2 = -\frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} \underline{I}_1$

d'où $\underline{Z}_{app} = R_1 + jL_1\omega - jM\omega \frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2(R_2 - jL_2\omega)}{R_2^2 + (L_2\omega)^2}$

On en déduit :

$$R_{app} = R_1 + R_2 \frac{M^2\omega^2}{R_2^2 + (L_2\omega)^2} \quad \text{et} \quad L_{app} = L_1 - L_2 \frac{M^2\omega^2}{R_2^2 + (L_2\omega)^2}$$

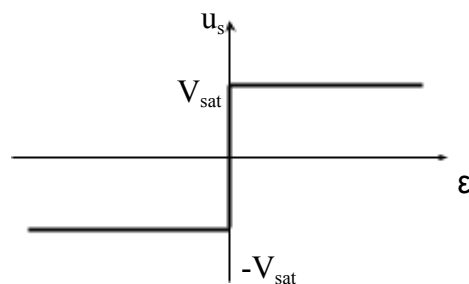
I.K $\Delta L_1 = L_{app} - L_1 = -L_2 \frac{M^2\omega^2}{R_2^2 + (L_2\omega)^2}$

Application numérique : $\Delta L_1 / L_1 = -5 \cdot 10^{-4}$

Partie II : Oscillateur

II.A 1) L'amplificateur opérationnel

a) Caractéristique de transfert statique (cas idéal)



b) Deux domaines : le domaine linéaire et le domaine non linéaire ou saturé.

Pour $\varepsilon = 0$: domaine linéaire où $-V_{sat} < u_s < V_{sat}$

Pour $\varepsilon > 0$ ($u_s = V_{sat}$) et pour $\varepsilon < 0$ ($u_s = -V_{sat}$): domaine saturé.

c) Amplificateur idéal :

- impédance d'entrée infinie : aucun courant n'entre par les entrées $i_+ = i_- = 0$

- dans le domaine linéaire, $V^+ = V^-$ ($\varepsilon=0$)

II.A 2) Caractéristique d'entrée de C_1

a) régime linéaire : on a $i_e = (u_e - u_s)/R$ et $u_e = V^- = V^+ = r u_s/(r + R')$

d'où (1) $i_e = -u_e/\alpha r$

Le circuit est équivalent à une résistance négative $-\alpha r$

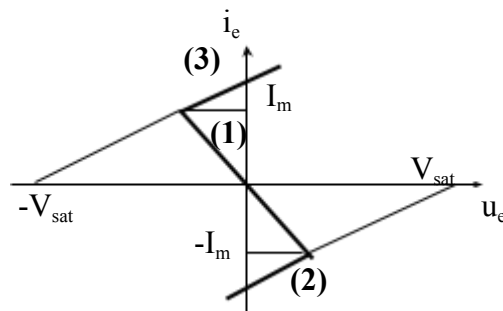
b) cas où $u_s = V_{sat}$: (2) $i_e = (u_e - V_{sat})/R$

On a $\epsilon > 0$ donc $u_e < \alpha r V_{sat}/(\alpha r + R)$ d'où $i_e < -I_m$ avec $I_m = V_{sat}/(\alpha r + R)$

cas où $u_s = -V_{sat}$: (3) $i_e = (u_e + V_{sat})/R$

On a $\epsilon < 0$ donc $u_e > -\alpha r V_{sat}/(\alpha r + R)$ d'où $i_e > I_m$

caractéristique :
(dipôle en « S »)



II.B 1) Conditions de démarrage des oscillations

a) Régime linéaire : on a $u_e = u_c + u_L + u_R = -\alpha r i_e$

$u_L = -L di_e/dt$; $u_R = -R i_e$ et $i_e = -C du_c/dt$.

En dérivant, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 i_e}{dt^2} + \frac{(R_1 - \alpha r)}{L} \frac{di_e}{dt} + \frac{i_e}{LC} = 0$$

$$\text{d'où } \xi = \frac{(R_1 - \alpha r)}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b) A $t = 0$, on a $i_e = 0$ (intensité dans l'inductance nulle) et $u_c = U_0$.

A $t = 0$, $u_e = 0 = u_c - L (di_e/dt) + 0$ d'où $(di_e/dt)_0 = U_0/L$.

Equation caractéristique : $x^2 + 2\xi\omega_0 x + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = \omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$ ($|\xi| < 1$) : régime pseudopériodique

$$i_e = e^{-\xi\omega_0 t} (A \cos(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t) + B \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t))$$

Conditions initiales ...

$$i_e = \frac{U_0}{L\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t)$$

c) Si $U_0 = 0$, alors i_e reste nul dans le cas de l'amplificateur opérationnel idéal. Les oscillations ne peuvent démarrer.

d) Les oscillations de i_e ont une amplitude croissante si ξ **est négatif**. Il faut donc $\alpha > (R_1/r)$

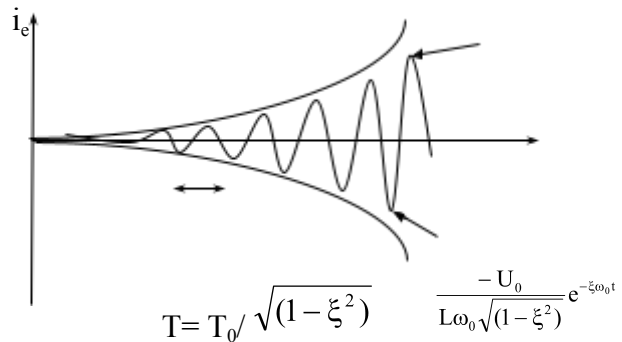
e) Application numérique :

$$\xi = -0,1 \quad (\xi < 0 \text{ et } |\xi| < 1)$$

$$\frac{U_0}{L\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t}$$

t

II.B 2) Amplitude des oscillations



a) courbe $i_e(t)$

Cette variation cesse lorsque $|i_e|$ atteint la valeur I_m : l'amplificateur se sature et on a $u_e = R i_e \pm V_{sat}$.

Comme $u_e = u_c + u_L + u_R$, en dérivant on obtient la nouvelle équation différentielle :

$$\frac{d^2 i_e}{dt^2} + \frac{(R_1 + R)}{L} \frac{di_e}{dt} + \frac{i_e}{LC} = 0$$

b) Pour $\theta \in [0, 0,2]$: régime saturé (3) Pour $\theta \in [0,2; 0,5]$: régime linéaire (1)

Pour $\theta \in [0,5; 0,7]$: régime saturé (2) Pour $\theta \in [0,7; 1]$: régime linéaire (1)

et ceci de façon périodique.

c) Il s'agit d'oscillations quasi sinusoïdales.

Période $T = 1$. $T_0 = 10^{-5}$ s Fréquence : $f = 1/T = 100$ kHz

Valeur maximale de $i_e = 1,2$ mA.

d) $u_{emax} = \alpha r I_m = 1,84$ V

$u_{smax} = V_{sat} = 15$ V.

II.B 3) Influence de la variation de l'inductance

a) Si L varie, ξ et ω_0 varient.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \frac{d\omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \frac{dL}{L} \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta L_1}{L_1} = 2,5 \cdot 10^{-4}$$

b) La variation de fréquence et donc de période est bien trop petite devant la fréquence ou la période pour distinguer une variation sur la courbe étudiée. $\Delta f/f = 3,8 \cdot 10^{-4}$

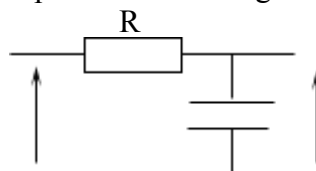
Partie III – Détecteur de métal

$$\text{III.A } v(t) = k u_s(t) \cdot u_s^{\text{ref}}(t) = (k U_{\max}^2/2) [\cos(2\pi(2f+\Delta f)t+\phi_0) + \cos(2\pi(\Delta f)t+\phi_0)]$$

$v(t)$ est la somme de deux fonctions sinusoïdales de fréquence :

$$f_1 = 2f + \Delta f \approx 2f = 200 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad f_2 = \Delta f < 1 \text{ kHz}$$

III.B 1) filtre passe bas du premier ordre de gain statique 1 :





On prend $f_c = (1/2\pi RC) = 1 \text{ kHz}$: par exemple $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 160 \text{ nF}$

III.B 2) Pour ce filtre passe-bas : $\underline{H} = 1/(1+jf/f_c)$

Pour $\Delta f \ll f_c$, $H = 1$ et $\arg(\underline{H}) = 0$: $s_2(t) = (k U_{\max}^2/2) \cos(2\pi(\Delta f)t + \phi_0)$

Pour $f_1 \gg f_c$, $H = f_c/f_1$ et $\arg(\underline{H}) = -\pi/2$: $s_1(t) = (f_c/f_1) (k U_{\max}^2/2) \sin(2\pi(f_1)t + \phi_0)$

d'où $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$.

Rapport des amplitudes : $A_1/A_2 = (f_c/2f) \ll 1$.

Le filtre sera d'autant meilleur que ce rapport des amplitudes sera faible : il va donc fortement atténuer le signal de haute fréquence : $s(t) \approx s_2(t)$.

III.C Pour être détecté, le signal $s(t)$ doit avoir une fréquence $\Delta f > 20 \text{ Hz}$, soit $\Delta f/f > 2 \cdot 10^{-4}$

On avait $\Delta f/f = 3,8 \cdot 10^{-4}$ (II.B 3) donc le signal peut être détecté.

III.D. En l'absence du métal, le filtre passe-bas ne laisse passer aucun signal d'amplitude suffisante: aucun son n'est émis du haut-parleur. En présence d'un métal, le filtre passe-bas laisse passer le signal de fréquence Δf : un son peut alors apparaître à la sortie du haut parleur, dont la fréquence augmente lorsqu'on s'approche du métal. On peut ainsi le détecter. Ainsi d'après la question III.C, la bobine B_2 de la première partie pourra être détectée par le dispositif précédent (même $\Delta L/L$ que pour la question II.B 3).