ثانوية الرازي- تازناخت	**الدوال الأسية**	ذ. لطرش عبد الكبير

تمرين ①

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال R بما يلي:

$g(x) = 1 + 4xe^{2x}$.

1. بين أن: $g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x}$ لكل x من R.
2. بين أن الدالة g تزايدية على $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ وتناقصية على المجال $]-\infty, -\frac{1}{2}[$.
3. أ) بين أن $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ ثم من تحقق $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ ثم استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من R .

II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على R بما يلي:

$f(x) = x + 1 + (2x - 1)e^{2x}$ و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$).

1. أحسب $f(x)$ ثم بين أن $f(x) = -\infty$ (نذكر $ue^{u} = 0$).
2. بين أن: $f'(x) = g(x)$ لكل x من R ثم استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على R.
3. أحسب $\frac{f(x)}{x}$ و استنتج أن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الاراتيب.
4. احسب $[f(x) - (x + 1)]$ و استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للمنحنى ( ) بجوار $-\infty$.
5. حدد زوج احداثيتي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المنحنى (C) ثم بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty, \frac{1}{2}[$ وفوق المستقيم (Δ) على المجال $]\frac{1}{2}, +\infty[$.
6. بين أن: $y = x$ هي معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C) في النقطة O.
7. بين أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف افصولها $-\frac{1}{2}$ (تحديد ارتوب نقطة الانعطاف غير مطلوب).
8. بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α في R وأن $0 \leq \alpha \leq 1$.

انشئ المستقيمين (Δ) و (T) و المنحنى (C) في المعلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي:

$g(x) = (x - 1)e^{x} + x + 1$.

1. احسب $g'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ ثم استنتج أن الدالة g تزايدية قطعا على $]0, +\infty[$.

2. بين أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ (لاحظ أن: $g(x)=0$).

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R^* بما يلي:

$f(x)=\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}$ و (C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن f دالة فردية.
2. أحسب (x) (نكر أن: $\frac{e^x-1}{x}=1$) ثم أول مبيانيا هذه النتيجة.
3. بين أن: $f(x)=0$ ثم أول مبيانيا هذه النتيجة (لاحظ أن: $f(x)=\frac{x}{e^x(1-e^{-x})^2}$ $(\forall x\in R^*)$).
4. بين أن: $f'(x)=-\frac{x}{(e^x-1)^3}g(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.
5. اعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

انشئ (C).

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على R بما يلي

$g(x)=e^{-x}+x-1$

1. احسب $g'(x)$, $\forall x\in R$ ثم ضع جدول تغيرات الدالّة g.
2. استنتج أنّ: $(\forall x\in R),\ e^{-x}+x\geq 1$.

II. لتكن f الدالّة العددية المعرّفة بما يلي: $f(x)=\frac{x}{e^{-x}+x}$ و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. حدد D_f. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال الثاني بالجزء الأول).
2. بين أنّ: $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}e^{-x}}$ لكل x من R.
3. بين أن: $f(x)=1$ و $f(x)=0$ ثمّ أوّل هندسيا هاتين النتيجتين.
4. احسب $f'(x)$, $\forall x\in R$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.
5. حدد معادلة المماس ل C_f في النقطة O أصل المعلم.
6. تحقّق أنّ: $x-f(x)=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$, $\forall x\in R$ استنتج الوضع النسبي ل C_f والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.
7. أنشيء C_f و (Δ).(نأخذ : $\frac{1}{1-e}\approx 0.6$)

III. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي:

$\{u_0=1 \qquad u_{n+1}=f(u_n)$

1. بيّن بالترجّع أن : $\forall n\in N,\ 0\leq u_n\leq 1$.
2. بين أنّ المتتالية (u_n) تناقصية.

استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة. ثمّ حدّد نهايتها.

نعتبر الدالة العددي المعرفة على R بما يلي: $f(x) = x + \frac{e^x-1}{e^x+1}$ ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن $f(-x) = -f(x)$ لكل x من R و استنتج أن النقطة O مركز تماثل للمنحنى ( ).
2. تحقق من أن: $f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x+1}$ لكل x من R. (يستحسن استعمال هذه الصيغة ل $f(x)$ لمعالجة الأسئلة الموالية).
3. بين أن $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ لكل x من R وتحقق من أن: $f'(0) = \frac{3}{2}$.
4. بين أن الدالة f تزايدية على R.
5. بين أن $y = \frac{3}{2}x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C) في النقطة O.
6. بين أن $f(x) = +\infty$.
7. أحسب $[f(x) - (x+1)]$ واستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للمنحنى(C) بجوار $+\infty$.
8. بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D).
9. أنشئ المستقيمين (D)و (T) و المنحنى (C) (نذكر أن O هو مركز تماثل للمنحنى (C)).

بين أن $H: x \mapsto x - ln(e^x + 1)$ دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$ على R.

I. نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x بحيث:

$f(x) = 2ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$ و (C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. تحقق من أن:

$e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$ لكل x من R ثم استنتج أن مجموعة تعريف الدالة f هي R وأن $(\forall x \in R) 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$.

2. أحسب (x) ثم بين أن $(x) = ln4$ و أول هذه النتيجة هندسيا.
3. بين أن $'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-1)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ لكل x من R وتحقق من أن $f'(0) = 0$.
4. أدرس اشارة على R واستنتج أن الدالة f تزايدية على المجال $[0, +\infty[$ وتناقصية على المجال $]-\infty, 0]$.
5. تحقق من أن:

$(\forall x \in R) f(x) = 2x + 2ln(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x})$.

6. بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للمنحنى $(\ )$ بجوار $+\infty$ R.

7. أ) تحقق أن:

$e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ لكل x من R.

ب) أدرس إشارة كل من $\sqrt{e^x} - 2$ و $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ على R.

ج) استنتج أن: $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \geq \sqrt{e^x}$ لكل x من المجال $[0, ln4]$.

8) بين أن: $f(x) \leq x$ لكل x من المجال $[0, ln4]$.

8. أنشئ المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف افصول إحداهما أصغر من -1 وأفصول الأخرى أكبر من 2 تحديدهما غير مطلوب ونأخذ $ln4 \approx 1,4$).

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من N. يمكنك في ما يلي استعمال نتائج دراسة الدالة f.

1. بين أن: $0 \leq u_n \leq ln4$ لكل n من N.

بين أن المتتالية (u_n) تناقصية ثم استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

1 أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على IR بـ $g(t) = e^t - t - 1$

2 ـ ماهي القيمة الحدية الصغرى للدالة g على IR ؟

3 ـ إستنتج أن : من أجل كل عدد حقيقي t : $e^t \geq t + 1$ و $e^t > t$

لتكن f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$

4 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - x e^{-x})$

5 ـ نقبل أن $\lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$ أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

6 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$

7 ـ شكل جدول تغيرات الدالة f (نقبل $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$)

في معلم متعامد و متجانس نعتبر القطع المكافئ (p) ذو المعادلة $y = x^2 - 2x$ و (C) منحنى الدالة f

8 ـ بين أن $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x^2 - 2x) = 0$ ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C) و (p)

9 ـ أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و (p)

10 ـ عين معادلة لكل من (D_1) و (D_2) مماسي المنحنيين (p) و (C) على الترتيب عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

11 ـ أرسم كل من (C) و (p) في نفس المعلم .

نعتبر g الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي: $g(x) = e^x - x - 1$.

أدرس تغيرات الدالة g ثم حدد إشارتها على IR .

استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $e^x \geq x+1$ و $e^x \neq x$.

لتكن f دالة المعرفة ب: $f(x)=x^2-2\ln(e^x-x)$.

حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

بين أن الدالة f دالة زوجية.

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

بين أن: $f(x)=x^2-2x-2\ln(1-xe^{-x})$