Содержание и значение математической символики

Клочанова Ольга Михайловна

Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена

Санкт-Петербург

2002

Введение.

История науки показывает, что логическая структура и рост каждой математической теории, начиная с определенного этапа ее развития, становятся все в большую зависимость от использования математической символики и ее усовершенствования.

Когда индийцы в V веке н. э. ввели знак нуля, они смогли оставить поразрядную систему счисления и развить абсолютную позиционную десятичную систему счисления, превосходство которой при счете если и не осознают, то повседневно используют сотни миллионов людей. Алгебра и аналитическая геометрия обязаны многим тому, что Виет и Декарт разработали основы алгебраического исчисления. Введенные Лейбницем обозначения производной и интеграла помогли развить дифференциальное и интегральное исчисление; задачи на вычисление площадей, объемов, работы силы и т. п., решение которых раньше было доступно только первоклассным математикам, стали решаться почти автоматически. Благодаря этому обозначения Лейбница получили широкое распространение и проникли во все разделы науки, где используется математический анализ.

Пример с обозначением производной и интеграла особенно ярко подтверждает правильность замечания Л. Карно, что в математике «символы не являются только записью мысли, средством ее изображения и закрепления, – нет, они воздействуют на самую мысль, они, до известной степени, направляют ее, и бывает достаточно переместить их на бумаге, согласно известным очень простым правилам, для того, чтобы безошибочно достигнуть новых истин».

В чем заключено объективное содержание математической символики? Чем объясняется значение символики в математике?

Математические знаки служат в первую очередь для точной (однозначно определенной) записи математических понятий и предложений. Их совокупность – в реальных условиях их применения математиками – составляет то, что называется математическим языком.

Использование знаков позволяет формулировать законы алгебры, а также и других математических теорий в общем виде. Примером могут послужить формулы той же алгебры:$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$x_{1,2}=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и т.п.

Математические знаки позволяют записывать в компактной и легкообозримой форме предложения, выражение которых на обычном языке было бы крайне громоздким. Это способствует более глубокому осознанию их содержания, облегчает его запоминание.

Математические знаки используются в математике эффективно и без ошибок, когда они выражают точно определенные понятия, относящиеся к объектам изучения математических теорий. Поэтому, прежде чем использовать в рассуждениях и в записях те или иные знаки, математик старается сказать, что каждый из них обозначает. В противном случае его могут не понять.

В связи со сказанным необходимо подчеркнуть следующее. Математики не всегда могут сказать сразу, что отражает тот или иной символ, введенный ими для развития какой-либо математической теории, средствами которой можно решать практически важные задачи. Сотни лет математики оперировали отрицательными и комплексными числами и получали с их помощью первоклассные результаты. Однако объективный смысл этих чисел и действий с ними удалось раскрыть лишь в конце XVIII и в начале XIX века. Лейбниц ввел символы dx и dy, развил дифференциальное исчисление и с помощью правил последнего показал исключительную оперативную силу этих символов. Однако Лейбниц не выявил объективного смысла знаков dx и dy; это сделали математики XIX века.

Знаки и системы знаков играют в математике роль, весьма сходную с той, какая в более широких сферах познания и практической деятельности людей принадлежит обычному разговорному языку. Подобно обычному языку, язык математических знаков позволяет обмениваться установленными математическими истинами, налаживать контакт ученых в совместной научной работе.

Решающим, однако, является то, что язык математических знаков без обычного языка существовать не может. Обычный (естественный) язык содержательнее языка математических знаков; он необходим для построения и развития языка математических знаков. Язык математических знаков только вспомогательное средство, присоединяемое к обычному языку и используемое в математике и в областях, где применяются ее методы.

Возможность использования языка знаков в математике обусловлена особенностями предмета ее исследований – тем, что она изучает формы и отношения объектов реального мира, в известных границах безразличные к их материальному содержанию. Существенна при этом и специфика математических доказательств. Математическое доказательство состоит в построении цепи высказываний, начальным звеном которой являются истинные исходные предложения, конечным – доказываемое утверждение. Промежуточные звенья цепи получаются в конечном счете из начального и соединяются с ним и конечным звеном с помощью законов логики и правил логического вывода. Если исходные утверждения записаны в символической форме, то доказательство сводится к их «механическим» видоизменениям.

Целесообразность, а в наше время и необходимость – использования языка знаков в математике обусловлена тем, что при его помощи можно не только кратко и ясно записывать понятия и предложения математических теорий, но и развивать в них исчисления и алгоритмы – самое главное для разработки методов математики и ее приложений. Достичь этого при помощи обычного языка если и возможно, то только в принципе, но не в практике.

Достаточная оперативность символики математической теории существенно зависит от полноты символики. Это требование состоит в том, что символика должна содержать обозначения всех объектов, их отношений и связей, необходимые для разработки алгоритмов теории, позволяющих решать любые задачи из классов однотипных задач, рассматриваемых в этой теории.

Оперирование математическими знаками есть идеализированный эксперимент: он в чистом виде описывает то, что имеет место или может быть (приближенно или точно) реализовано в действительности. Только поэтому оперирование математическими знаками способно служить открытию новых математических истин.

Решающей силой развития математической символики является не «свободная воля» математиков, а требования практики математических исследований. Именно реальные математические исследования помогают математикам в конце концов выяснить, какая система знаков наилучшим образом отображает структуру рассматриваемых количественных отношений, в силу чего может быть эффективным орудием их дальнейшего изучения.

Введение нуля и развитие позиционной десятичной системы счисления.

Интуитивное представление о числе, по-видимому, так же старо, как и само человечество, хотя с достоверностью проследить все ранние этапы его развития в принципе невозможно. Прежде чем человек научился считать или придумал слова для обозначения чисел, он, несомненно, владел наглядным, интуитивным представлением о числе, позволявшим ему различать одного человека и двух людей или двух и многих людей.

Названия чисел, выражающие весьма абстрактные идеи, появились, несомненно, позже, чем первые грубые символы для обозначения числа объектов в некоторой совокупности. В глубокой древности примитивные числовые записи делались в виде зарубок на палке, узлов на веревке, выложенных в ряд камешков, причем подразумевалось, что между пересчитываемыми элементами множества и символами числовой записи существует взаимно однозначное соответствие. Но для чтения таких числовых записей названия чисел непосредственно не использовались. Ныне мы с первого взгляда распознаем совокупности из двух, трех и четырех элементов; несколько труднее распознаются на взгляд наборы, состоящие из пяти, шести или семи элементов. А за этой границей установить на глаз их число практически уже невозможно, и нужен анализ либо в форме счета, либо в определенном структурировании элементов. Счет на бирках, по-видимому, был первым приемом, который использовался в подобных случаях: зарубки на бирках располагались определенными группами. Очень широко был распространен счет на пальцах, и вполне возможно, что названия некоторых чисел берут свое начало именно от этого способа подсчета.

Важная особенность счета заключается в связи названий чисел с определенной схемой счета. Например, слово «двадцать три» – не просто термин, означающий вполне определенную (по числу элементов) группу объектов; это термин составной, означающий «два раза по десять и три». Здесь отчетливо видна роль числа десять как коллективной единицы или основания; и действительно, многие считают десятками, потому что, как отметил еще Аристотель, у нас по десять пальцев на руках и на ногах.

Система счисления, которой мы в основном пользуемся сегодня, десятичная позиционная. Десятичная, так как ее основание 10. Основанием позиционной системы счисления называется возводимое в степень целое число, которое равно количеству цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления. Основание показывает также, во сколько раз изменяется количественное значение цифры при перемещении ее на соседнюю позицию. В позиционных системах счисления количественный эквивалент (значение) цифры зависит от ее места (позиции) в записи числа

Десятичная система характеризуется тем,что в ней 10 единиц какого-либо разряда образуют единицу следующего старшего разряда. Другими словами, единицы различных разрядов представляют собой различные степени числа 10.

Десятичной позиционной предшествовали другие, основанные на различных принципах, системы счисления. Так примером непозиционной системы (то есть такой системы, где количественный эквиваленткаждойцифры не зависитот ее положения (места, позиции) в записи числа) может служить нумерация, используемая древними греками. Эта система относится к числу алфавитных. Первыми восемью буквами греческого алфавита (с добавлением «архаичной» буквы ϛ =вау, имевшей значение 6 обозначались числа от единицы до девяти, следующими восемью с добавлением ϙ=коппы, имевшей значение 90, - десятки от 10 до 90, следующими восемью с добавлением ϡ=сампи, означавшей 900, - сотни от 100 до 900, наконец, тысячи от 1000 до 9000 обозначались так же, как единицы, но со штрихом внизу: ,α означала 1000. Для того чтобы отличать числа от слов, над ними ставилась черточка. Так, число 1305 греки записывали, $\overline{\alpha\tau\varepsilon}$. От греческой нумерации ведет свое происхождение древнерусская. Пример другой непозиционной системы дает употребляемая поныне римская нумерация.

Мы пользуемся ею для обозначения юбилейных дат, для нумерации некоторых страниц книги (например, страниц предисловия), глав в книгах, строф в стихотворениях и т. д. В позднейшем своем виде римские цифры выглядят так: I=1; V=5; X=10; L=50; C=100; D=500; M=1000.

О происхождении римских цифр достоверных сведений нет. Цифра V могла первоначально служить изображением кисти руки, а цифра X могла составиться из двух пятерок. Точно так же знак для 1000 мог составиться из удвоения знака для 500 (или наоборот).

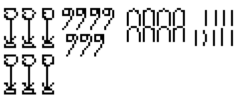
Все целые числа (до 5000) записываются с помощью повторения вышеприведенных цифр. При этом если большая цифра стоит перед меньшей, то они складываются, если же меньшая стоит перед большей (в этом случае она не может повторяться), то меньшая вычитается из большей. Например, VI=6, т.е. 5+1, IV=4, т.е. 5-1, XL=40, т е. 50-10, LX=60, т.е. 50+10. Подряд одна и та же цифра ставится не более трех раз: LXX=70; LXXX=80; число 90 записывается XC (а не LXXXX).

Первые 12 чисел записываются в римских цифрах так: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII. IX, X, XI, XII.

Примеры: XXVIII=28; XXXIX=39; CCCXCVII=397; MDCCCXVIII=1818.

Выполнение арифметических действий над многозначными числами в этой записи очень трудно. Тем не менее римская нумерация преобладала в Италии до 13 века, а в других странах Западной Европы - до 16 века.

Древние египтяне использовали десятичную непозиционную систему счисления. Единицу обозначали одной вертикальной чертой, а для обозначения чисел, меньших 10, нужно было поставить соответствующее число вертикальных штрихов. Чтобы записанные таким образом числа было легко узнавать, вертикальные штрихи иногда объединялись в группы из трех или четырех черт. Для обозначения числа 10, основания системы, египтяне вместо десяти вертикальных черт ввели новый коллективный символ, напоминающий по своим очертаниям подкову или крокетную дужку. Множество из десяти подковообразных символов, т.е. число 100, они заменили другим новым символом, напоминающим силки; десять силков, т.е. число 1000, египтяне обозначили стилизованным изображением лотоса. Продолжая в том же духе, египтяне обозначили десять лотосов согнутым пальцем, десять согнутых пальцев – волнистой линией и десять волнистых линий – фигуркой удивленного человека. В итоге древние египтяне могли представлять числа до миллиона. Так, например, с помощью коллективных символов и повторений уже введенных символов число 6789 в иероглифических обозначениях можно было бы записать как



Самые древние из дошедших до нас математических записей высечены на камне, но наиболее важные свидетельства древнеегипетской математической деятельности запечатлены на гораздо более хрупком и недолговечном материале – папирусе. Два таких документа – папирус Ринда, или египетского писца Ахмеса (ок. 1650 до н.э.) и московский папирус, или папирус Голенищева (ок. 1850 до н.э.) – служат для нас основными источниками сведений о древнеегипетских арифметике и геометрии. В этих папирусах более древнее иероглифическое письмо уступило место скорописному иератическому письму, и это изменение сопровождалось использованием нового принципа обозначения чисел. Группа одинаковых символов заменялись более простой по начертанию пометой или знаком, например, девять записывалось как вместо , а семьсот как вместо . В этой записи число 6789 имело вид , причем знаки более высокого порядка располагались справа, а не слева.

Введение египтянами цифровых обозначений ознаменовало один из важных этапов в развитии систем счисления, так как дало возможность существенно сократить записи.

Основные недостатки непозиционных систем нумерации- трудности с изображением произвольно больших чисел и, главное, более сложный, чем в позиционных системах, процесс вычислений. (Последнее, правда, облегчалось употреблением счетных досок – абаков, так что изображение чисел было необходимо лишь для конечного результата).

Крупным шагом вперед, оказавшим колоссальное влияние на все развитие математики было создание позиционных систем счисления. Первой такой системой стала вавилонская шестидесятеричная система счисления, в которой появился знак , указывающий на отсутствие разряда, выполняющего роль нашего нуля. Концевой нуль, который позволял различать, например, обозначения для 1 и 60, у вавилонянотсутствовал. Удобство вычислений в шестидесятеричной системе сделало ее популярной у греческих астрономов. К. Птолемей (II в. н.э.) при вычислениях в шестидесятеричной системе пользуется знаком «0» для обозначения отсутствующихразрядов как в середине, так и в конце числа (0, омикрон – первая буква греческого слова ovden-ничто). О вавилонской шестидесятеричной системе нам напоминает деление часа на 60 минут и минуты на 60 секунд, а также деление угла равного четырем прямым, на 360 градусов. Неудобство шестидесятеричнойсистемы счисления в сравнении с десятичной – необходимость большого количества знаков для обозначения индивидуальных цифр (от 0 до 59), более громоздкая таблица умножения.

Создание десятичной позиционной системы счисления, одного из выдающихся достижений средневековой науки, - заслуга индийских математиков. Позиционные десятичные записи чисел встречаются в Индии с VI в. Так, в дарственной записи 595 года встречается запись числа 346 цифрами брахми ≡ (≡-3, -4, -6). Первую достоверную запись нуля в виде кружочка мы находим в изображении числа 270 в настенной записи из Гвалиора, относящейся к 876г. Иногда ноль обозначался точкой. Неясно, был ли нуль собственным изобретением индийцев; возможно, они познакомились с ним по сочинениям александрийских астрономов.

Вот какова эволюция написания индийских цифр.

Символика Виета и Декарта и развитие алгебры.

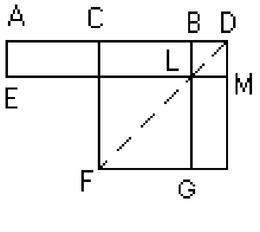
Считается, что эллины заимствовали первые сведения по геометрии у египтян, по алгебре - у вавилонян.

В древнейших египетских источникахпапирусе Райнда и Московском папирусе- находим задачи на «аха» (термин «аха» означает «куча», «груда»). Имеется в виду некоторое количество, неизвестная величина, подлежащая определению) соответствующие современным линейным уравнениям, а также квадратным вида $ax^2 = b$. В вавилонских клинописных текстах имеется большое число задач, решаемых с помощью уравнений и систем первой и второй степеней, которые записаны без символов, но в специфической терминологии. В этих текстах решаются задачи, приводящие к трехчленным квадратным уравнениям вида $ax^2 - bx = c$ или $x^2 - px = q$. В задачах на «аха» можно обнаружить зачатки алгебры как науки о решении уравнений.

Но если вавилоняне за два тысячелетия до нашей эры умели числовым путем решать задачи, связанные с уравнениями первой и второй степеней, то развитие алгебры в трудах Евклида (365 - ок. 300 гг. до н. э.), Архимеда (287-212 гг. до н. э.) и Аполлония (ок. 260-170 гг. до н. э.) носило совершенно иной характер: греки оперировали отрезками, площадями, объемами, а не числами. Их алгебра строилась на основе геометрии и выросла из проблем геометрии. В XIX в. совокупность приемов древних получила название геометрической алгебры.

В качестве примера геометрической алгебры греков рассмотрим решение уравнения $x^2 + ax = b^2$.

Античные математики решали эту задачу построением и строили искомый отрезок так, как показано на рисунке.



НазаданномотрезкеАВ (равном a)строилипрямоугольникAMсо сторонами (а + х) и х, равновеликий данному квадрату (b^2), таким образом, чтобы избыточная над прямоугольником AL (равная ах) площадь ВМ была квадратом, по площади равным x^2. Сторона этого квадрата и давала искомую величину х. Такое построение называли гиперболическим приложением площади.

Далее, полагая задачу решенной, делили АВ пополам точкой С, на отрезке LM строили прямоугольник MG, равный прямоугольнику ЕС. Тогда прямоугольник AM будет разностью квадратов DF и LF. Эта разность и квадрат LF известны, поэтому по теореме Пифагора можно получить квадрат DF. ПослеэтогонаходиливеличинуDC(равную ½а +х) и DB (равную х).

Геометрическое построение в точности соответствует преобразованию, с помощью которого в современных обозначениях решается уравнение указанного типа:

$$b^2 = ax + x^2 = \left(\frac{a}{2}+x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Конечно же, при таких построениях отыскивались только положительные корни уравнений: отрицательные числа появились в математике значительно позже.

С помощью геометрии древним удавалось также доказывать многие алгебраические тождества. Но каковы эти доказательства! Они безупречны в отношении логики и слишком громоздки. Вот как формулирует Евклид теорему, выражающуютождество $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Если отрезок (αβ) разделен в точке (γ) на два отрезка, то квадрат, построенный на (αβ), равен двум квадратам на отрезках (αγ, γβ) вместе с удвоенным прямоугольником на (αγ, γβ).

Естественно, связывая число с геометрическим образом (линией, поверхностью, телом), древние оперировали только однородными величинами; так, равенство было возможно для величин одинакового измерения.

Такое построение математики позволило античным ученым достигнуть существенных результатов в обосновании теорем и правил алгебры, но в дальнейшем оно стало сковывать развитие науки.

Приведенные примеры могут создать ощущение, что математика древних греков примитивна. Но это не так: созданная ими математика по своему идейному содержанию глубока и питала идеями и методами математику вплоть до XVII в. - века научной революции; многие идеи древних получили дальнейшее развитие в новой математике, созданной усилиями выдающихся умов XVI—XVII вв.

Накопленные в странах Древнего Востока знания состояли из набора разрозненных математических фактов, рецептур для решения некоторых конкретных задач и не могли обладать достаточной строгостью и достоверностью. Создание основ математики в том виде, к которому мы привыкли при изучении этой науки в школе, выпало на долю греков и относится к VI—V вв. до н. э. С этого времени начала развиваться дедуктивная математика, построенная на строгих логических доказательствах.

Каково же было состояние математики в это время в Европе. Об этом наука располагает крайне скудными сведениями.

В XII – XIII вв. в Европе интенсивно переводились в арабского языка как труды самих арабов, так и работы древних греков, переведенные на арабский язык.

Первым европейским математиком, которому удалось осветить многие вопросы и внести в математику свой вклад, был Леонардо Пизанский (Фибоначчи, 1180–1240), написавший «Книгу абака». В ней рассмотрены различные задачи, указаны методы их решения, причем арифметика и алгебра линейных и квадратных уравнений изложены с небывалой до этого времени точностью и полнотой.

Существо задачи Леонардо излагает словесно; неизвестную он называет res (вещь) или radix (корень); квадрат неизвестной – census (имущество) или quadratus (квадрат); данное число – numerus. Все это латинские пероводы соответствующих латинских слов.

Современник Леонардо, Иордан Неморарий (XIII в), употреблял буквенные обозначения более систематично и решал задачи с применением линейных и квадратных уравнений, сначала в общем виде, а затем иллюстрировалих числовыми примерами.

Французский епископ Николь Орем (1323-1382) рассматривал «дробно – рациональные отношения», соответствующе современным степеням $a^{1/2}$, $a^{1/4}$, $a^{3/2}$ и т.д., сформулировал правила операций с этими отношениями типа $a^{\frac{m}{n}} = (a^n)^{\frac{1}{m}}$, $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$, $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}} = (a\ \ b)^{\frac{1}{mn}}$, $(a^m)^{\frac{p}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{q}}$

Орем вплотную подошел к понятию иррационального показателя. Он доказал расходимость гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

Выдающимся алгебраистом своего времени стал монах-францисканец Лука Пачоли (ок. 1445 – ок.1514) близкий друг Леонардо да Винчи, работавший профессором Математики в университетах и различных учебных заведениях Рима, Болоньи, Неаполя, Флоренции, Милана и других городов.

Он ввел «алгебраические буквы» (caratterialgebraici), дал обозначения квадратному и кубическому корням, корню четвертой степени; неизвестную x он обозначал co (cosa – вещь), x^2– ce (censo - квадрат, от латинского census), x^3– cu (cubo), x^4– ce. ce. (censo de censo), x^5 – p°r° (primo relato – «первоеrelato»,x^6– p°r° x – ce. cu. (censo de «второеrelato»), x^8– ce. ce. ce. (de censo), x^9– cu. cu. (cubo de cubo),x^{10}– ce. p°r° (censo de primo relato), x^{13} – 3°r° (tersio relato - «третье relato») ит. д.; свободныйчленуравнения– n° (numero – число). Как видим, некоторые степени Пачоли получал мультипликативным способом с помощью показателей 2 и 3 ($x^4 = x^{2\cdot 2}$, $x^6 = x^{2\cdot 3}$, $x^9 = x^{3\cdot 3}$ и т. д.), а в случаях, когда так не получалось, пользовался словом relato (например, при образовании x^5, x^7, x^{11} и т. д.). Специальными символами Пачоли обозначил вторую неизвестную и ее степени. Для обозначения операции сложения он воспользовался знаком $\widetilde{p}$ (plus – больше), для обозначения вычитания– знаком $\widetilde{m}$ (minus – меньше). Он сформулировал правила умножения чисел, перед которыми стоят знаки $\widetilde{p}$ и $\widetilde{m}$.

Раздел «Суммы», посвященный алгебраическим уравнениям, Пачоли закончил замечанием о том, что для решения кубических уравнений $x^3 + ax = b$ и $x^3 + b = ax$ «искусство алгебры еще не дало способа, как не дан еще способ квадратуры круга».

Некоторый шаг в совершенствовании алгебраической символики сделал бакалавр медицины Н. Шюке (ум. ок. 1500 г.), который в книге «Наука о числах в трех частях» изложил правила действий с рациональными и иррациональными числами и теорию уравнений. Для сложения и вычитания он вслед за Пачоли пользовался знаками $\widetilde{p}$ и $\widetilde{m}$, причем, знак $\widetilde{m}$ служил и для обозначения отрицательного числа. Неизвестную величину он называл premier («первое число»), а ее степени– вторыми, третьими и т. д, числами. Записи степеней неизвестной у Шюке лаконичны. Например, современные символы 5, 5ж, 5x, $5x^2$, $5x^3$ у него выглядели бы так: 5°, 5^1, 5^2, 5^3. Вместо равенства $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$ Шюке писал: «8^3, умноженное на $7^{1\cdot}\ \widetilde{m}$, дает 56^2». Таким образом, он рассматривал и отрицательные показатели. Относительно свободных членов уравнения Шюке указывал, что эти числа «имеют имя нуль».

Значительного успеха в совершенствовании «алгебраических букв» Луки Пачоли достигли немецкие алгебраисты – «коссисты». Они вместо $\widetilde{p}$ и $\widetilde{m}$ ввели знаки + и –, знаки для неизвестной, и ее степеней, свободного члена.

XVI в. в алгебре ознаменовался величайшим открытием – решением в общем виде уравнений третьей и четвертой степеней.

Спицион дель Ферро в 1506 г. нашел решение кубического уравнения вида

$x^3 + ax = b$a,b>0. (1)

Чуть позже Тарталья указал решение этого же уравнения в виде x = $\sqrt[3]{u}$ - $\sqrt[3]{v}$, где u – v = b, uv = $\left(\frac{a}{3}\right)^3$, откуда u и v находятся как корни квадратного уравнения.

Также он нашел решение уравнения $x^3 = ax + b$a,b>0(2)

в виде x = $\sqrt[3]{u}$ + $\sqrt[3]{v}$, где u + v = b, uv = $\left(\frac{a}{3}\right)^3$.

Уравнение же $x^3 + b = ax$a,b>0можно решить с помощью уравнения (2).

В те времена предпочитали избегать отрицательных корней и задачи, сводящиеся к отрицательным корням уравнения (2), преобразовывали так, чтобы они приводили к положительным корням уравнения (3). Лишь Кардано позже осознал выгоду рассмотрения отрицательных корней.

Почему рассматривались только уравнения вида (1) и (2)? На этот вопрос ответ дал Кардано.

Чтобы разобраться в нем, рассмотрим полное уравнение третьей степени.

$y^3 + ay^2 + by + c = 0$.

Не следует думать, что Тарталья и Кардано писали такие уравнения. Нет, так стали поступать гораздо позже. Записывать все члены уравнения в одной части, приравнивая к одной части, начал Декарт. Да и символики не было, пользовались прообразами символов и словами. Уравнение $x^3 + ax = b$ записывалось примерно так: «куб» (x^3) $\tilde{p}$ некоторое количество (a) «вещей» (x) равно данному «числу» (b). Понять можно, но оперировать сложно.

Полное уравнение можно преобразовать в неполное, не содержащее члена с квадратом неизвестной. Сделаем заменуу = x + a и подставим в уравнение; получим $x^3 + (3\alpha + a)x^2 + (3\alpha^2 + 2\alpha a + b)x + (\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0$.

Положим $3\alpha + a = 0$. Найдем отсюда $\alpha = - a/3$и подставим в выражения

$p = 3\alpha^2 + 2\alpha a + b$,$q = \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c$.

Тогда уравнение примет вид $x^3 + px + q = 0$.

В нашей символике это уравнение соответствует уравнениям (1), (2), которые решал Тарталья.

Кардано узнал способ решения уравнений третьей степени, предложенный Тартальи, опубликовал его. Формула же стала носить название «формулы Кардано».

Выведем теперь ее.

Рассмотрим уравнение $x^3 + px + q = 0$. Введем новые неизвестные $x = u + v$ и подставим их в исходное уравнение; получим $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$.

Приравняем $3uv + p$ к нулю: $3uv + p = 0$.

Уравнение примет вид $u^3 + v^3 + q = 0$. Тогда $uv = -\frac{p}{3}$,$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$, $u^3 + v^3 = -q$.

Выражения u^3 и v^3 можно принять за корни квадратного уравнения $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$.

Решая его, получим $z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$,$z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.

Таким образом, $x = u + v = \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}$,$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

Это и есть формула Кардано. Не лишне заметить, что в таком виде Кардано ее не искал: он формулировал решение уравнений (1) и (2)и рассматривал связь между уравнениями (2) и (3).

В случае, когда $\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27} < 0$, под квадратным корнем получается отрицательное число и корень дает мнимость. Этот случай получил название неприводимого, так как решение уравнения третьей степени не приводится к решению квадратного уравнения. Как уже говорилось, с ним не справились ни Тарталья, ни Кардано. Его с помощью тригонометрии разобрал Виет.

Чтобы получить представление о символике Кардано, приведем пример записи корня кубического уравнения $x^3 + 6x = 20$. Выражение $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$ записывалось так R_x.u.cu.R_x.108 $\tilde{p}$ 10| $\tilde{m}$ R_x.u.cu.R_x.108 $\tilde{m}$ 10.

Здесь R_x – знак корня (Radix), R_x.u.cu означает корень кубический из всего выражения до вертикальной черты или после нее, $\tilde{p}$ и $\tilde{m}$ - сокращения словplus и minus.

Кардано показал, что легко можно решить уравнение $x^4 \pm ax = bx^2 + \frac{a^2}{4b}$. Он привел его к виду $x^4 = b(x \quad \frac{a}{2b})^2$, а затем извлечением корня получил квадратное уравнение. Аналогично он рассматривал и некоторые другие виды уравнений.

Однако уравнение $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$, предложенное да Кои Кардано не сумел решить.

Открыл метод решения уравнений четвертой степени 23 – летний ученик Кардано – Луиджи Феррари.

После того, как были исследованы уравнения третьей степени, задача об уравнениях четвертой степени стала более легкой. Феррари рассматривал уравнение, не содержащее члена с x^3, т.е. уравнение вида $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$.

Он преобразовывал его так, чтобы в левой части был полный квадрат, а в правой – выражение не выше второй степени относительно x.

Выделением полного квадрата получалось $\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = x^4 + ax + \frac{a^2}{4} = -bx - c + \frac{a^2}{4}$, $\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = -bx - c + \frac{a^2}{4}$.

Теперь следовало выполнить такие преобразования, чтобы из левой и правой частей можно было извлечь корень. С этой целью Феррари вводил новую переменную t и прибавлял к обеим частям выражение $2\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)t + t^2$.Этодает $\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = 2tx^2 - bx - c + at + \frac{a^2}{4} + t^2$, $\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = 2tx^2 - bx + (-c + \frac{a^2}{4} + at + t^2)$.

Нужно, чтобы правая часть была полным квадратом. Вспомним, как обстоит дело с трехчленом $ax^2 + bx + c$.

Выделим в нем полный квадрат: $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = {=}a(x^2 + 2x\cdot\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a(x^2 + 2x\cdot\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac - b^2}{4a^2}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Трехчлен будет полным квадратом, когда $4ac - b^2 = 0$. В нашем случае роль коэффициента при x^2 играет 2t, а роль свободного члена- выражение в скобках правой части уравнения. Тогда выражению $4ac - b^2 = 0$ соответствует $4\cdot 2t(t^2 + at + \frac{a^2}{4} - c) - b^2 = 0$, $b^2 = 2t(4t^2 + 4at + a^2 - 4c)$.

Таким образом, нахождение t свелось к решению кубического уравнения, а x находится з квадратного уравнения после извлечения корня из левой и правой частей, т.е. из уравнения $x^2 + \frac{a}{2} + t_0 = \pm\sqrt{2t_0}\left(x - \frac{b}{4t_0}\right)$.

Кардано отмечает, что таким же приемом можно решать уравнения, в которых отсутствует член не с третьей степенью x, а с первой. В этом случае делаетсяподстановках = k/y.

Открытия, сделанные итальянцами в алгебре и систематически изложенные Кардано, стали доступны математикам других стран и дали импульс развитию науки.

Дальнейшее развитие алгебры было связано с совершенствованием символики и разработкой общих методов решения уравнений.

Язык кванторов и основания математической логики.

В связи с тем, что элементы логики представляют собой неотъемлемую составную часть школьного обучения математике, они должны изучаться в единстве с собственно математическим материалом на всех этапах обучения. Соответствующий язык необходимо вводить постепенно для обозначения уже разъясненных математических и логических понятий, чтобы в дальнейшем он становился необходимым компонентом обиходного математического языка.

Эта тема важна для школьной математики. Не овладев ее основными действиями, нельзя понять последующие темы, как, не овладев таблицами сложения и умножения, нельзя научиться арифметике и тем более алгебре.

Исходные объекты алгебры высказываний – это простые высказывания. Их будем обозначать строчными латинскими буквами a, b, c, …, x, y, z. Предполагается, что всякое простое высказывание обладает одним и только одним из двух свойств: либо оно истинно, либо ложно.

Будем пользоваться почти повсеместно принятой терминологией: свойства истинности (и) и ложности (л) мы будем называть значениями истинности высказываний. При такой терминологии значение истинности сложного высказывания есть функция от значений истинности простыхвысказываний; такая функция называется логической связкой.

а) Отрицание (знак ⌉). Если а – высказывание, то⌉а (читается: «не а») также высказывание; оно истинно или ложно в зависимости от того, ложно или истинно высказывание а.

Таким образом, операция отрицания описывается следующей таблицей:

а	⌉а
и	л
л	и

Мы видим, что операция ⌉ в теории высказываний вполне соответствует понятию отрицания в обыденном смысле слова. Если, например, а – высказывание «Число три делит число шесть», то отрицанием ⌉а этого высказывания будет «Число три не делит число шесть». Высказывание а при этом истинно, высказывание ⌉а, – ложно.

Если же в качестве высказывания а взять какое-нибудь ложное высказывание, например «Число три делит число пять», то его отрицание ⌉а будет высказывание «Число три не делит число пять» - истинное высказывание.

б) Конъюнкция. В качестве знака для конъюнкции мы будем употреблять знак $\wedge$ (можно также &).

Если a и b - высказывания, то a $\wedge$b (читается: «a и b») – новое высказывание; оно истинно тогда и только тогда, когда a истинно и b истинно.

В отличие от операции отрицания, зависящей от одного элементарного высказывания, конъюнкция, как и все последующие приводимые нами связки, зависит от двух элементарных высказываний, поэтому они называются двуместными связками, отрицание же - связка одноместная.

Для задания двуместных связок удобно записывать матрицы истинности в виде таблиц с двумя входами: строки соответствуют значениям истинности одного элементарного высказывания, столбцы – значениям другого элементарного высказывания, а в клетке пересечения столбца и строки помещается значение истинности соответствующего сложного высказывания.

Значение истинности сложного высказывания a $\wedge$b задается матрицей

b a	и	л
и	и	л
л	л	л

Как видно, определение операции конъюнкции вполне соответствует обыденному значению союза «и»:

в) Дизъюнкция. В качестве знака для дизъюнкции мы будем употреблять знак $\vee$.

Если a и b – высказывания, то a $\vee$b (читается: «a или b») – новое высказывание, оно ложное, если a и b ложны; во всех остальных случаях a $\vee$b истинно.

Таким образом, матрица истинности для операции дизъюнкции выглядит так:

b a	и	л
и	и	и
л	и	л

Операция дизъюнкции довольно хорошо соответствует обыденному значению союза «или».

Примеры.

«Три делит пять или три больше шести» ложно;

«Три делит шесть или три больше шести» истинно;

«Три делит шесть или три меньше шести» истинно.

г) Импликация. В качестве знака для импликации будем употреблять знак ⇒.

Если a и b – два высказывания, то a ⇒b (читается: «a имплицирует b») – новое высказывание; оно всегда истинно, кроме того случая, когда a истинно, а b ложно.

Матрицаистинностиоперацииимпликацииследующая:

b a	и	л
и	и	л
л	и	и

В импликации a ⇒b первый член a называется антецедентом, второй b – консеквентом.

Операция ⇒ описывает в некоторой мере то, что в обыденной речи выражается словами «Если a, то b», «Из a следует b», «a – достаточное условие для b», но на этой аналогии не следует слишком настаивать. Действительно, учитывая определение импликации, данное выше, и интерпретируя выражение a ⇒b как «если a, то b», мы получаем: «Если дважды два – четыре, то трижды три – девять» – истинное высказывание; «Если дважды два – пять, то трижды три – восемь» – истинное высказывание и только высказывание типа «Если дважды два – четыре, то трижды три – восемь» ложно.

По определению импликации сложное высказывание a ⇒ всегда истинно, если консеквент истинный или если антецедент ложный, что в очень малой мере отражает обыденное значение выражения «Если a, то b» или «Из a следует b». Ни в какой мере не следует рассматривать высказывание импликации как означающее, что антецедент является причиной, а консеквент — следствием в том смысле, как это понижается в естественных науках.

Несколько позже мы убедимся, что операция импликации достаточно точно выражает понятие логического следования в той форме, как оно употребляется в математике.

д) Эквиваленция. Для этой операции мы будем употреблять знак ⇔. Операция эквиваленции определяется так: если a и b – два высказывания, то a ⇔b (читается: «a эквивалентно b»; ⇔ соответствует словесному выражению «...тогда и только тогда, когда...») – новое высказывание, которое истинно, если либо оба высказывания истинны, либо оба – ложны.

Из этого определения связки ⇔ следует, что ее матрица истинности выглядит так:

b a	и	л
и	и	л
л	л	и

Введенными пятью связками (⌉, ∧, ∨, ⇒, ⇔) мы ограничимся.

С помощью уже введенных связок мы можем строить сложные высказывания, зависящие не только от двух, но и от любого числа элементарных высказываний.

Отметим в этой связи, что так называемое нестрогое неравенство a ≤b (читается: a меньше или равно b») представляет собой дизъюнкцию (a <b) ∨ (a = b); оно истинно, если истинно по меньшей мере одно из

входящих в него простых высказываний. Хорошими примерами сложных высказываний, встречающихся в школьной практике, являются так называемые двойные неравенства. Так, формула $a < b < c$ означает $(a < b) \wedge (b < c)$, а, например, $a < b \leq c$ означает сложное высказывание $(a < b) \wedge ((b < c) \vee (b = c))$.

Построение сложных высказываний делается аналогично тому, как в элементарной алгебре с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления строятся сколь угодно сложные рациональные выражения. А именно, предположим, что мы уже построили два каких-нибудь сложных высказывания, которые мы ради удобства сокращенно обозначим большими латинскими буквами А и В (при этом мы условимся, что элементарные высказывания следует рассматривать как частный случай сложных). Тогда новые высказывания можно получить, соединив А и В одним из знаков $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ или же построив высказывание $\rceil A$ и заключив результат в скобки. Сложными высказываниями будут, например, высказывания следующего вида:

$((a \Rightarrow b) \wedge (c \vee a))$;$((a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (c \Rightarrow \rceil a))$.

При этом предполагается, что встречающиеся здесь буквы являются сокращенными обозначениями каких-либо высказываний.

Таким образом, в принципе зная эти высказывания, можно было бы построить русские фразы, выражающие эти сложные высказывания. Только словесное описание сложных высказываний быстро становится малообозримым, и именно введение целесообразной символики позволяет проводить более глубокое и точное исследование логических связей между различными высказываниями.

Располагая значением истинности простых высказываний, легко подсчитать на основании определения связок значение истинности сложного высказывания. Пусть, например, дано сложное высказывание

$((b \vee c) \Leftrightarrow (b \wedge a))$

и пусть входящие в него элементарные высказывания имеют следующие значения истинности: а = л, b = и, с = и. Тогда $b \vee c$ = и,$b \wedge a$ = л, так что $((b \vee c) \Leftrightarrow (b \wedge a))$, т. е. рассматриваемое высказывание ложно.

Методические рекомендации к теме «Введение нуля и развитие позиционной десятичной системы счисления».

В 5 классе уже возможно обсуждение с учащимися этой темы.

Можно вспомнить с ними, что счет у нас ведется десятками: десять единиц образуют один десяток, десять десятков – одну сотню и т.д., иными словами: десять единиц первого разряда образуют одну единицу второго разряда, десять единиц второго разряда – одну единицу третьего разряда и т.д.

Такой способ счета, группами в десять, которым мы пользуемся, называется десятичной системой счисления. Число десять называется основанием десятичной системы счисления. Строго определения десятичной системы давать не стоит.

Затем, нужно обсудить, почему мы считаем именно десятками, то есть как возникла десятичная система счисления?

Люди на первых ступенях развития общества считали с помощью десяти пальцев рук. Сейчас иногда говорят: «Перечесть по пальцам».

Далее следует поговорить о том, что были племена и народы, которые при счете пользовались лишь пятью пальцами одной руки, считали пятками, поэтому и использовали они пятеричную систему счисления, в которой основой служит число 5.

Существуют и другие системы счисления: двоичная, двадцатеричная (следы ее сохранились до сих пор во французском языке – они говорят вместо «восьмидесяти» - «четырежды двадцать»). Двадцатеричная система возникла у народов, считавших не только с помощью пальцев рук, но и пальцев ног. Древние вавилоняне пользовались шестидесятеричной системой счисления.

Можно обсудить, сколько цифр используется в каждой из перечисленных систем счисления для изображения чисел.

Также полезно для учащихся будет ознакомиться с римской нумерацией, обсудить где она применяется. Учащиеся должны научиться записывать арабские числа с помощью римских. Тут же можно предложить им пару занимательных задач, где используют римские цифры с целью привлечения их внимания.

Больше никакие алфавитные системы не стоит затрагивать, а только продемонстрировать табличку с алфавитными нумерациями, а также числовые знаки различных народов (см. дальше).

После этого учащимся можно сообщить вкратце о происхождении знака 0.

Нужно отметить, что сейчас нуль это не просто знак для отделения разрядов, а число, которое можно складывать, вычитать, умножать и делить, как и другие числа. Единственное ограничение – делить на 0 нельзя.

Возможно вынесение этого материала на факультативные занятие, где обсуждению различных систем счисления можно отвести больше времени.

С учащимися 7-8 классов возможно более полное рассмотрение этой темы.

Начать следует с рассказа о том, что существуют позиционные и непозиционные системы счисления. Дать определения одной и другой системы счисления, попросить учащихся привести примеры.

Затем можно обсудить двоичную систему. Учащиеся должны научиться переводить числа из двоичной системы счисления в десятичную, и наоборот. После этого подобные действия проделать с другой системой счисления, например, пятеричной. Можно научить учащихся складывать и умножать числа в различных системах счисления, отличных от десятичной. Далее, я считаю, что нужно рассмотреть десятичную непозиционную систему (например, древних египтян). Учащиеся должны понять, насколько тяжело изображать большие числа в непозиционных системах счисления. Только тогда они смогут по достоинству оценить заслугу индийских математиков, которые создали десятичную позиционную систему счисления.

Прежде чем начать рассказ о происхождение знака нуля можно предложить учащимся записать число сто три тысячи двести пятьдесят с помощью цифр, но не используя знака нуля. Обсудить как они это сделали, далее предложить сложить это число с числом двадцать тысяч семьсот восемьдесят девять, опять таки записанного с помощью цифр, но без знака нуля. У учащихся возникнут некоторые затруднения. После этого будет целесообразно рассказать им о заслуге индийцев.

Если кто-то из учащихся заинтересуется нумерациями различных народов, то можно предложить им для самостоятельного изучения книгу Э. Кольмана «История математики в древности».

Список литературы

Алексеев Б. Т. Философские проблемы формализации знания. Издательство ленинградского университета. 1981.

Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М., издательство иностранной литературы. 1963.

Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М., «Наука». 1966.

Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. М., «Наука». 1967.

Глейзер Г.И. История математики в школе. Пособие для учителей. Под ред. В.Н. Молодшего. М., «Просвещение», 1964.

Калужнин Л.А. Элементы теории множеств и математической логики в школьном курсе математики. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1978. 88с.

Нешков К.И. И др. Множества. Отношения. Числа. Величины. Пособие для учителей. М. «Просвещение», 1978. 63 с.

Марков С.Н. Курс истории математики: Учебное пособие. – Иркутск: Издательство иркутского университета, 1995. – 248с.