

Premier problème. Interférences lumineuses, trous d'Young

1^{ère} partie

1. Elargisseur faisceau $\frac{d_{ap}}{d_{av}} = \frac{-f'_2}{f'_1}$
2. couleur : rouge (laser usuel de TP)
- spectre visible : 400 nm (violet) à 750 nm (rouge)

2^{ème} partie

- 3.1 optique géométrique : on devrait voir deux petites taches lumineuses sur l'écran.
à cause du faible diamètre des trous, il y a un phénomène de diffraction de la lumière.
- 4.1. sur l'écran (E) on observe une alternance de taches sombres et brillantes selon l'axe Ox
- 4.2 si on obture le trou (S2), on observe la tache de diffraction (alternance anneaux sombres et brillants) centrée en $x=a/2$, $y = z = 0$.
- 4.3. si on translate (P) suivant Ox, la figure de diffraction est translatée selon Ox. Idem selon Oy.
- 4.4. si on translate (E) selon $z'z$, l'interfrange est modifié

3^{ème} partie

- 5.1. M (x, y, 0) $S_1 (a/2, 0, -D)$ $S_2 (-a/2, 0, -D)$

$$S_1M = \sqrt{(x - a/2)^2 + y^2 + D^2} \quad S_2M = \sqrt{(x + a/2)^2 + y^2 + D^2}$$

$$5.2. \delta(M) = \frac{a \cdot x}{D}$$

- 5.3 la différence de marche ne dépend que de x ; les franges d'interférences sont des lieux $x = \text{cte}$: si on remplace les trous par des fentes on observera des franges rectilignes // à Oy.

$$6.1. s_{1M}(t) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda} \left(t - \frac{S_1M}{c}\right)\right) \quad s_{2M}(t) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda} \left(t - \frac{S_2M}{c}\right)\right)$$

$$6.2. s(M) = s_{1M}(t) + s_{2M}(t) = 2s_0 \cos\left(\frac{\pi c}{\lambda} \left(2t - \frac{S_1M}{c} - \frac{S_2M}{c}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} (S_2M - S_1M)\right)$$

$$6.3. I(M) = 4K s_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} (S_2M - S_1M)\right) = 4K s_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \delta\right) = 4K s_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda D}\right)$$

$$6.4. \text{interfrange } i = \text{période spatiale du facteur en } \cos^2 \text{ d'où } i = \frac{\lambda D}{a}$$

- on définit l'ordre d'interférence par $\delta = p\lambda = \frac{ax_p}{D}$; on peut définir l'interfrange par $i = x_{p+1} - x_p$
- 6.6. ordre 0 : $p=0$ donc $x=0$.

4^{ème} partie

7. la lame placée devant S_2 introduit une différence de marche $(n-1)e$ entre S_1 et S_2

$$\delta'(M) = \frac{a \cdot x}{D} + (n-1)e$$

l'interfrange n'est pas modifié.

$$(n-1)eD$$

La frange d'ordre 0 est telle que $\delta'(M) = 0$ donc $x_0 = -\frac{(n-1)eD}{a}$
 $n > 1$ donc $x_0 < 0$: les franges sont déplacées « vers le bas ».

8. on a de nouveau un déphasage entre S_1 et S_2

$$\delta''(M) = \frac{a \cdot x}{D} - a \cdot \sin(\alpha)$$

La frange d'ordre 0 est telle que $\delta''(M) = 0$ donc $x_0 = D \sin(\alpha)$; les franges sont déplacées « vers le haut ».

Deuxième problème : Ondes électromagnétiques

1^{ère} partie

1. Equations de Maxwell... dans le vide : $\mathbf{j} = 0$ et $\rho = 0$

2. équations de propagation $\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{E})) = \dots$

$$3. \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E} \quad \Delta \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}$$

en reportant dans l'équation de propagation on obtient $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$
c représente la vitesse de propagation des ondes EM.

4. on écrit $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z$

$$\bullet \quad \text{div}(\mathbf{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = [k_x \cdot E_{ox} + k_y \cdot E_{oy} + k_z \cdot E_{oz}] \cdot \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = 0$$

on obtient $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$: $\mathbf{k}$ et $\mathbf{E}$ sont orthogonaux

• de même $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$: $\mathbf{k}$ et $\mathbf{B}$ sont orthogonaux

$$\bullet \quad \text{à partir de } \text{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ on obtient } \mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}}{\omega}$$

• à partir de l'équation de propagation de E on obtient $k = \omega / c$ et $B = E/c$

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}$$

5. 1. vecteur de Poynting :

le flux de $\mathbf{\Pi}$ à travers une surface fermée est égal à la puissance traversant cette surface ; unité de $\mathbf{\Pi}$: W/m²

$$5.2. \quad \mathbf{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} \mathbf{k} = \epsilon_0 c E^2 \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \text{ étant le vecteur unitaire de même direction et même sens que } \mathbf{k}.$$

2^{ème} partie

6. dans le vide, (région $x < 0$), à proximité du plan $x=0$, le champ électrique vérifie : $\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_x$ (1)
 σ étant la densité surfacique de charges en $x=0$

dans le vide, (région $x < 0$), à proximité du plan $x=0$, le champ magnétique vérifie : $\mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{j}_s \wedge \mathbf{e}_x$ (2)
 $\mathbf{j}_s$ étant la densité surfacique de courants en $x=0$.

7.1. d'après la question 4 le champ $\mathbf{E}_r$ est orthogonal à $\mathbf{e}_x$,

la relation (1) donne alors :

- en projection sur $\mathbf{e}_x$: $\sigma = 0$
- en projection sur $\mathbf{e}_y$: $E_o \cos(\omega t) + E_{oy} \cos(\omega t) = 0$
- en projection sur $\mathbf{e}_z$: $E_{oz} = 0$

$$\text{d'où } \mathbf{E}_{or} = -E_o \mathbf{e}_y$$

$$7.2. \quad \mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{E}_i}{c} = \frac{E_o}{c} \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_z \quad \mathbf{B}_r = \frac{-\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{E}_r}{c} = \frac{E_o}{c} \cos(\omega t + kx) \mathbf{e}_z$$

7.3. champ résultant dans le vide :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = 2 E_o \sin(\omega t) \sin(kx) \mathbf{e}_y \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r = 2 \frac{E_o}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \mathbf{e}_z$$

Il s'agit d'une onde stationnaire

$$8. \quad \mathbf{\Pi} = \frac{E_o^2}{\mu_o c} \sin(2\omega t) \sin(2kx) \mathbf{e}_x$$

sur une période le vecteur de Poynting est nul en moyenne : l'énergie ne se propage pas.

3^{ème} partie

$$9. E = E_0 \cos[\omega t - kx \cos(\alpha) - kz \sin(\alpha)] \mathbf{e}_y + E_0 \cos[\omega t - kx \cos(\alpha) + kz \sin(\alpha)] \mathbf{e}_y \\ = 2E_0 \cos[\omega t - kx \cos(\alpha)] \cos[kz \sin(\alpha)] \mathbf{e}_y$$

10. le premier facteur correspond à une onde se propageant selon $\mathbf{e}_x$, mais l'onde n'est pas plane à cause du 2^{ème} facteur.

11. $\langle I \rangle = K \cos^2[kz \sin(\alpha)] \mathbf{e}_x$; rappelle expression de I dans les interférences des trous d'Young.

Troisième problème : mécanique en référentiel non galiléen

1^{ère} partie

$$1. \text{ poids : } \vec{P} = -mg \vec{e}_z$$

$$\text{force inertie entraînement } \vec{F}_{ie} = m \omega^2 \overrightarrow{OM} = m \omega^2 r \vec{e}_r$$

$$\text{force d'inertie de Coriolis : } \vec{F}_{ic} = -2m \omega \vec{e}_z \wedge \vec{v} = -2m \omega v \vec{e}_\theta$$

Le contact anneau-tige étant sans frottement, la réaction est normale à la tige, elle a donc des composantes selon $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$.

$$2. \text{ Le PFD, appliqué dans le réf lié à la tige, projeté sur } \vec{e}_r, \text{ donne : } m \ddot{r} = m \omega^2 r$$

$$3. r = r_0 \cosh(\omega t)$$

$$4. \text{ l'anneau quitte la tige lorsque } r = l \text{ soit } \tau = \operatorname{argch}(l/r_0)/\omega$$

$$5. \text{ dans le référentiel lié à la tige, la vitesse de l'anneau à } t \text{ vaut } v = r_0 \omega \sinh(\omega t)$$

$$\text{à l'instant } \tau : \vec{v}_f = r_0 \omega \sqrt{\cosh^2(\omega \tau) - 1} \vec{e}_r = \omega \sqrt{l^2 - r_0^2} \vec{e}_r$$

dans le référentiel du laboratoire, la vitesse de l'anneau lorsqu'il quitte la tige est :

$$\vec{v}'_f = \omega \sqrt{l^2 - r_0^2} \vec{e}_r + l \omega \vec{e}_\theta$$

2^{ème} partie

$$6. \text{ poids : } \vec{P} = -mg \vec{e}_z$$

$$\text{force inertie entraînement } \vec{F}_{ie} = m \omega^2 \overrightarrow{HM} = m \omega^2 r \sin(\alpha) \vec{e}_r$$

$$\text{force d'inertie de Coriolis : } \vec{F}_{ic} = -2m \omega \vec{e}_z \wedge \vec{v} = -2m \omega v \sin(\alpha) \vec{e}_\theta$$

$$7. \text{ PFD, appliqué dans le réf lié à la tige, projeté sur } \vec{e}_r : m \ddot{r} = -mg \cos(\alpha) + m \omega^2 r \sin^2(\alpha)$$

$$8. r = \left(r_0 - \frac{g \cos(\alpha)}{\omega^2 \sin^2(\alpha)} \right) \cosh(\omega \sin(\alpha) t) + \frac{g \cos(\alpha)}{\omega^2 \sin^2(\alpha)}$$

$$9. \text{ à l'équilibre } \ddot{r} = 0 \text{ d'où } r_{eq} = \frac{g \cos(\alpha)}{\omega^2 \sin^2(\alpha)}$$

$$10. \text{ il ne peut exister une position d'équilibre sur l'anneau que si } r_{eq} > l \text{ soit } \omega > \omega_0 = \sqrt{\frac{g \cos(\alpha)}{l \sin^2(\alpha)}}$$

11. si on écarte légèrement l'anneau de sa position d'équilibre :

a. si $r > r_{eq}$ F_{ie} augmente, l'anneau s'éloigne de l'équilibre

b. si $r < r_{eq}$ F_{ie} diminue, l'anneau s'éloigne de l'équilibre

l'équilibre est donc instable