

Zadanie 1. (0-2)

W połowie XX wieku opracowany został sposób określania wieku skamieliny. Metoda ta polega na zbadaniu zawartości izotopu węgla ^{14}C w znalezisku. Niezależnie od sposobu absorbowania izotopu ^{14}C , jego zawartość w organizmach żywych jest stała. Wraz ze śmiercią absorpcja ustaje, a jego zawartość w organizmie maleje wraz z upływem lat. Szybkość rozpadu izotopu ^{14}C w nieżyjącym organizmie po t latach opisuje funkcja:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

gdzie:

$m(t)$ wyraża masę izotopu ^{14}C w próbce po t latach,

m_0 oznacza początkową masę izotopu ^{14}C w próbce.

Paleontolog odnalazł kość prehistorycznego zwierzęcia. Wstępnie ocenił, że to zwierzę żyło około 11000 lat temu. Badanie zawartości ^{14}C wykazało, że obecnie ilość tego izotopu stanowi 30% zawartości początkowej.

Oblicz i oceń, czy paleontolog prawidłowo oszacował czas, w którym żyło prehistoryczne zwierzę? Zapisz obliczenia, w obliczeniach przyjmij, że $\log_{\frac{1}{2}} 0,3 \approx 1,74$.

Zadanie 2. (0-3)

Test składa się z 8 zadań zamkniętych. Do każdego pytania podane są trzy odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Student zalicza test, jeśli w wyznaczonym czasie udzieli poprawnych odpowiedzi na co najmniej 6 pytań. Student w każdym pytaniu wybierał losowo odpowiedź. Przyjmij, że w każdym pytaniu wybór każdej z odpowiedzi jest jednakowo prawdopodobny.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ten student zaliczył test. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0-3)

Wykaż, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, prawdziwa jest nierówność:

$$x(x-1)(x-2)(x-3) + 1 \geq 0.$$

Wskazówka: skorzystaj ze wzoru: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Zadanie 4. (0-3)

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{4x^2+3x+1}{2x+1}$ określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -\frac{1}{2}$.

Napisz równania tych stycznych do wykresu funkcji f , które są równoległe do prostej $x - y + 7 = 0$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-3)

Dany jest czworokąt $ABCD$, w który wpisano okrąg. Punkty E, F, G, H są punktami styczności tego okręgu z bokami czworokąta $ABCD$ oraz $|\sphericalangle HAE| = \alpha$, $|\sphericalangle EBF| = \beta$.

Wykaż, że miara $\sphericalangle FGH$ czworokąta $EFGH$ jest równa $\frac{1}{2}(360^\circ - \alpha - \beta)$.

Zadanie 6. (0-4)

Rozwiąż nierówność

$$|2x - 3| - |x + 5| < 7.$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-4)

Rozwiąż równanie:

$$\sin 5x = \cos 3x$$

w przedziale $[-\pi, 0]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0-5)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest równa $5\sqrt{3}$, a kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę 120° .

Oblicz objętość ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 + (m - 1)x + m + 2 = 0$$

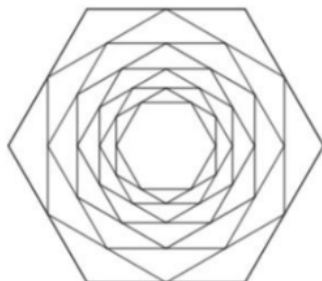
ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$(x_1 - 3x_2)(x_2 - 3x_1) = 20m + 21.$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 10.

W sześciokącie foremnym o polu P_1 i długości boku a połączono odcinkami środki kolejnych boków otrzymując boki sześciokąta foremnego o polu P_2 . Następnie w sześciokącie foremnym o polu P_2 połączono odcinkami środki kolejnych boków otrzymując boki sześciokąta foremnego o polu P_3 i tak dalej. Konstrukcję dziewięciu pierwszych sześciokątów foremnych przedstawiono na poniższym rysunku.



Pola wszystkich sześciokątów foremnych utworzonych w powyższy sposób tworzą nieskończony ciąg geometryczny (P_n) .

Zadanie 10.1 (0-2)

Wykaż, że ciąg (P_n) jest ciągiem zbieżnym.

Zadanie 10.2 (0-3)

Niech S oznacza sumę wszystkich wyrazów tego ciągu, a S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

Wyznacz najmniejszą wartość n , dla której spełniona jest nierówność

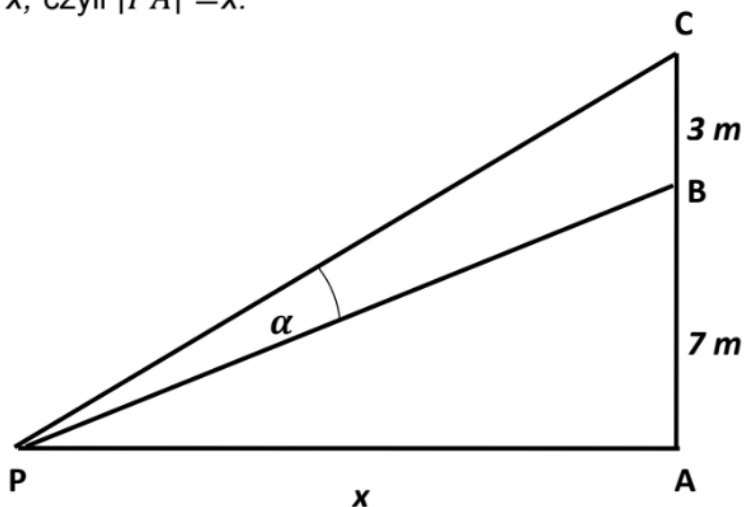
$$4(S - S_n) < 9(S_2 - S_1).$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 11.

Na ścianie wieżowca wisi prostokątny billboard reklamowy, którego wysokość wynosi 3 m. Dolna krawędź bilbordu znajduje się na wysokości 7 m nad poziomem oczu oglądającego. Niech α oznacza kąt pod jakim widać billboard. Odległość obserwatora znajdującego się w punkcie P od budynku oznaczono przez x , czyli $|PA| = x$.

Patrz na rysunek pomocniczy:

**Zadanie 11.1 (0-2)**

Wykaż, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3x}{x^2 + 70}$ jeśli $x \in (0, +\infty)$.

Zadanie 11.2 (0-4)

Oblicz, w jakiej odległości od ściany budynku powinien stanąć oglądający billboard reklamowy, aby widzieć go jak najlepiej. Wynik podaj w przybliżeniu do jedności. Zapisz obliczenia.

Wskazówka: Billboard reklamowy widać najlepiej z tego miejsca, w którym kąt α jest największy, czyli największy jest tangens tego kąta.

Zadanie 12.

W kartezjańskim układzie współrzędnych dane są punkty: $A(2; 1)$, $B(11; -2)$ i $C(6; -7)$. Przez punkty A, B, C poprowadzono okrąg $\mathcal{O}$.

Zadanie 12.1 (0-3)

Wyznacz równanie okręgu $\mathcal{O}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.2 (0-4)

Przez punkt $A(2; 1)$ należący do okręgu $\mathcal{O}: (x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 25$ o środku w punkcie S , poprowadzono styczną k .

Wyznacz współrzędne takiego punktu P położonego na prostej k , że spełniona jest zależność $\operatorname{tg}(\sphericalangle APS) = \frac{1}{3}$. Zapisz obliczenia.