Департамент освіти і науки Чернівецької облдержадміністрації
Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області

ІІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії 2017/2018 н.р.

11 клас

Задача 1. ***(6 балів)***

Кулясте зоряне скупчення **M5** в сузір'ї Змії має видиму зоряну величину **6,2,** а абсолютна зоряна величина дорівнює **-7,9.** Видимий кутовий діаметр скупчення **15 кутових мінут.**

Визначити:

1.1. Відстань до скупчення.
1.2. Його лінійний діаметр.
1.3. Світність скупчення (у світностях Сонця).

<u>Розв'язок.</u>

1.

$$M = m + 5 - 5\lg r; \quad 5\lg r = m + 5 - M;$$

$$\lg r = \frac{m - M}{5} + 1$$

$$\lg r = \frac{6{,}2 - (-7{,}9)}{5} + 1 = 3{,}82; \quad r \approx 6\,607 \text{ пк}$$

2 бали

2.

$$d = r\,\mathrm{tg}\,\varphi; \quad d = 6607 \cdot \mathrm{tg}\,\frac{15}{60} = 28{,}8 \text{ пк}$$

2 бали

3.

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{0{,}4(M_\odot - M)}; \quad \frac{L}{L_\odot} = 10^{0{,}4(4{,}77 + 7{,}9)}$$

$$L \approx 116\,950\, L_\odot$$

2 бали

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Задача 2. ***(8 балів)***

Спостерігач зафіксував, що деяка зоря кульмінувала в **2 год. 54 хв.** і зайшла в **5 год. 45 хв. 8-го вересня.**

2.1. В який час зоря зійде **9 вересня?**

2.2. В якому, приблизно, напрямку **(N, S, E, W, NE,, NW, SE, SW)** слід очікувати схід зорі?

<u>Розв'язок.</u>

1. Час між кульмінацією та заходом зорі:

5 год 45 хв - 2 год 54 хв = 2 год 51 хв ***1 бал***

2. Час між сходом зорі і її кульмінацією такий же самий:

2 год 51 хв ***1 бал***

3. Отже, схід зорі ***8 вересня*** відбувається о:

2 год 54 хв - 2 год 51 хв = 0 год 3 хв ***1 бал***

4. Сидерична доба **23 год 56 хв** (тобто наступного разу зоря зійде на **4 хв** раніше):

0 год 3 хв + 23 год 56 хв = 23 год 59 хв

і це буде ***8 вересня*** ***1 бал***

5. Таким чином, ***9 вересня*** зоря зійде ще на **4 хв** раніше:

23 год 55 хв ***1 бал***

6. З **1** та **2** випливає, що зоря над горизонтом, приблизно, перебуває

6 год = 3 год + 3 год.

Зоря кульмінує **на півдні (S).** ***1 бал***

Якщо б зоря була над горизонтом **12 год = 6 год + 6 год,** то вона б зійшла точно на **сході (E),** триває **3 год = 6 год/2,** то появу зорі слід очікувати в напрямку **Південний Схід (SE).** ***2 бали***

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Задача 3. (8 балів)

Два супутники рухаються навколо Землі по колових орбітах, розташованих в одній площині, із швидкостями $\mathbf{V_1 = 7{,}8}$ **км/с** і $\mathbf{V_2 = 7{,}8}$ **км/с.**

Визначити інтервал часу, через який обидва супутники регулярно зближуються на мінімальну відстань один від одного.

Отримати остаточну формулу, в яку крім $\mathbf{V_1}$ і $\mathbf{V_2}$ входить радіус Землі **R** і прискорення вільного падіння на поверхню Землі **g**.

<u>Розв'язок.</u>

1. Прискорення вільного падіння на поверхні Землі:

1 бал

$$mg = G\frac{mM}{R^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow GM = gR^2 \qquad (1)$$

2. Колова швидкість $\mathcal{V}_1$ на відстані $\mathbf{R_1}$ від центра Землі:

$$\frac{\cancel{m}\mathcal{V}_1^2}{\cancel{R_1}} = G\frac{\cancel{m}M}{R_1^{\cancel{2}}} \Rightarrow R_1 = \frac{GM}{\mathcal{V}_1^2} \qquad (2)$$

1 бал

Аналогічно:

$$R_2 = \frac{GM}{\mathcal{V}_2^2} \qquad (3)$$

3. Після підстановки **(1)** в **(2)** і **(3)**:

1 бал

$$R_1 = \frac{gR^2}{\mathcal{V}_1^2} \quad i \quad R_2 = \frac{gR^2}{\mathcal{V}_2^2} \qquad (4)$$

4. Період обертання супутників:

1 бал

$$T_1 = \frac{2\pi R_1}{\mathcal{V}_1} \quad i \quad T_2 = \frac{2\pi R_2}{\mathcal{V}_2} \qquad (5)$$

Після підстановки **(4)** в **(5)**:

1 бал

$$T_1 = \frac{2\pi gR^2}{\mathcal{V}_1^3} \quad i \quad T_2 = \frac{2\pi gR^2}{\mathcal{V}_2^3} \qquad (6)$$

5. Скористаємося синодичним рівнянням:

1 бал

6. $$\frac{1}{S}=\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}=\frac{T_2-T_1}{T_2\cdot T_1};\quad S=\frac{T_2\cdot T_1}{T_2-T_1} \qquad (7)$$

Після підстановки **(6)** в **(7)**:

$$S=\frac{\frac{2\pi gR^2}{\mathcal{V}_2^3}\cdot\frac{2\pi gR^2}{\mathcal{V}_1^3}}{\frac{2\pi gR^2}{\mathcal{V}_2^3}-\frac{2\pi gR^2}{\mathcal{V}_1^3}}=\frac{2\pi gR^2}{\mathcal{V}_2^3\cdot\mathcal{V}_1^3\cdot\frac{\mathcal{V}_1^3-\mathcal{V}_2^3}{\mathcal{V}_2^3\cdot\mathcal{V}_1^3}}$$

1 бал

Остаточно: $$S=\frac{2\pi gR^2}{\mathcal{V}_1^3-\mathcal{V}_2^3} \qquad (8)$$

7. Числовий результат:

$$S=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 9{,}8\cdot(6{,}38\cdot 10^6)^2}{(7{,}8\cdot 10^3)^3-(7{,}7\cdot 10^3)^3}=\frac{61{,}544\cdot 40{,}7\cdot 10^{12}}{10^9(474{,}552-456{,}533)}$$

$$S\approx 139011\,\text{с}\approx 38{,}6\ \text{год}$$

1 бал

Задача 4. (10 балів)

Температура зорі **T = 6500К** і радіус **R**, який на **20%** перевищує сонячний. Планета з альбедо **ά= 0,1** знаходиться на відстані **r = 1,5 а.о.** від зорі.

4.1. Отримати детальну формулу (в термінах **T, R**, **ά, r**) для визначення температури планети.

4.2. Яка температура такої планети?

4.3. Яка температура планети Земля згідно формули, яку отримано в пункті **4.1**?

4.4. Прокоментуйте отриманий в пункті **4.3** числовий результат.

<u>Розв'язок.</u>

1. Енергія випромінювання зорі, що припадає на одиницю площі планети (за **1 с**):

$$\frac{L}{4\pi r^2}$$

2. Вся енергія: $$\frac{L}{4\pi r^2}\cdot S=\frac{L}{4\pi r^2}\cdot 2\pi R_п^2; \qquad (1)$$ *1 бал*

- де $R_п$ – радіус планети.

3. З урахуванням альбедо: $$\frac{L}{4\pi r^2}\cdot 2\pi R_п^2(1-ά) \qquad (2)$$ *1 бал*

4. Енергія випромінювання планети згідно закону Стефана-Больцмана:

$$4\pi R_п^2\sigma T_п^4; \qquad (3)$$ *1 бал*

- де $T_п$ – температура поверхні планети.

5. Згідно Закону збереження енергії, формула **(2) = (3):**

$$\frac{L}{4\pi r^2}\cdot 2\pi R_п^2(1-\alpha) = 4\pi R_п^2 \sigma T_п^4 \qquad \textbf{(4)}$$ ***1 бал***

6. Світність зорі також визначається законом Стефана-Больцмана**:**

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \qquad \textbf{(5)}$$

7. Підставляємо **(5)** в **(4)** :

$$\frac{\cancel{4\pi} R^2 \cancel{\sigma} T^4}{\cancel{4\pi} r^2}\cdot \cancel{\pi} R_п^2(1-\alpha) = 4\cancel{\pi} R_п^2 \cancel{\sigma} T_п^4 \qquad \textbf{(6)}$$ ***2 бали***

8. Після перетворень:

$$T_п^4 = T^4\cdot\frac{(1-\alpha)}{4}\cdot\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

і остаточно

$$T_п = T\sqrt{\frac{R}{r}}\cdot\sqrt[4]{\frac{(1-\alpha)}{4}} \qquad \textbf{(7)}$$ ***1 бал***

9. Розрахунки:

$$T_п = 6500\sqrt{\frac{1{,}2\cdot 6{,}96\cdot 10^8}{1{,}5\cdot 1{,}5\cdot 10^{11}}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1-0{,}1}{4}} = 273\ К$$ ***1 бал***

10. Для Землі:

$$T = 5800\sqrt{\frac{6{,}96\cdot 10^8}{1{,}5\cdot 10^{11}}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1-0{,}36}{4}} \approx 250\ К$$ ***1 бал***

11. Правильний коментар. ***1 бал***

Задача 5. (8 балів)

З'ясуйте такі обставини космічного перельоту Земля – Місяць по гоманівській (напівеліптичній) орбіті.

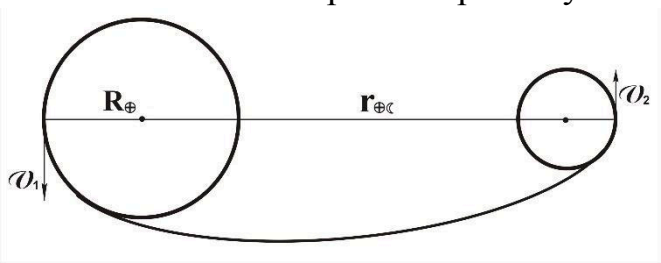
5.1. Швидкість на старті із Землі?

5.2. Швидкість наближення до поверхні Місяця?

5.3. Час перельоту.

<u>Розв'язок.</u>

1. Велика піввісь орбіти перельоту:



$$2a = R_\oplus + r_{\oplus☾} + R_☾;$$

$$a = \frac{R_\oplus + r_{\oplus☾} + R_☾}{2};$$

$$a = \frac{6380+384400+1738}{2} \approx 196260\ км = 1{,}96\cdot 10^8 м$$ ***2 бали***

2.

$$\mathcal{V} = \sqrt{GM_\oplus\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}$$

Під час старту:

$$\mathcal{V}=\sqrt{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\ 8\cdot10^{24}\left(\frac{2}{6{,}38\cdot10^{6}}-\frac{1}{1{,}96\cdot10^{8}}\right)}\approx 11\ 100\ \text{м/с}\approx 11{,}1\ \text{км/с}$$ ***2 бали***

3. Аналогічно знайдемо $\mathcal{V}_2$:

$$\mathcal{V}_1 R_{\oplus}=\mathcal{V}_2\cdot\left(r_{\oplus☾}+R_{☾}\right);\quad \mathcal{V}_2=\frac{\mathcal{V}_1 R_{\oplus}}{r_{\oplus☾}+R_{☾}}$$

$$\mathcal{V}_1=11{,}1\,\frac{6380}{386136}\approx 0{,}18\ \text{км/с}$$ ***1 бал***

4. З **III** закона Кеплера:

$$\frac{T^2}{T_{☾}^2}=\frac{a^3}{a_{☾}^3};\qquad T=T_{☾}\sqrt{\left(\frac{a}{a_{☾}}\right)^3}$$ ***1 бал***

$$T=27{,}3^{d}\sqrt{\left(\frac{1{,}96\cdot10^{8}}{3{,}84\cdot10^{8}}\right)^3}\approx 9{,}95^{d}$$ ***1 бал***

$$t=\frac{T}{2}\approx 5\ \text{діб}$$ ***1 бал***